This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

[redacted]

Bound

JUN 8 1906

Harvard College Library

FROM

Annals of Mathematics

SCIENCE CENTER LIBRARY

NIEUW ARCHIEF VOOR WISKUNDE

NIEUW ARCHIEF

VOOR

WISKUNDE

UITGEGEVEN DOOR HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP
TE AMSTERDAM

ONDER REDACTIE VAN

J. C. KLUYVER, D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE

TWEEDE REEKS

DEEL VI

AMSTERDAM
DELSMAN EN NOLTHENIUS
1905

Sci 900.30

INHOUD.

		Blz.
L^2 10, Q 2.	A. TOXOPEUS. De confocale kwadratische ruimten in de ruimte van vier afmetingen.	1
P 1 c, Q 2.	M. J. van UVEN. De optische afbeelding in de vierde afmeting	33
L^1 17 e, M^1 6 b γ.	M. J. van UVEN. Over een door twee kegelsneden bepaalde omhullende, waarvan de ontwondene eener kegelsnee een bijzonder geval is	38
D 1 b γ, 6 e.	W. KAPTEYN. Sur un développement de M. Neumann.	49
J 2 a.	A. E. RAHUSEN. Over eene uitbreiding van het theorema van Tchebycheff.	56
K 8.	C. A. CIKOT. Quadrilatère complet; droite des orthocentres et droite des milieux des diagonales (démonstration s'appuyant sur les seuls livres d'Euclide)	62
K 8.	C. A. CIKOT. Sur un point remarquable du quadrilatère inscrit.	63
T 2 c.	C. KREDIET. Sur un cas de propagation de vibrations sonores, infiniment petites	81
M^1 5 k α.	F. SCHUH. Over de meetkundige plaats der punten, van waar uit twee begrensde rechten onder gelijke hoeken gezien worden	92
R 8 c γ, H 2 c γ.	J. H. M. FALKENHAGEN. Die rollende Bewegung eines beliebigen schweren Umdrehungskörpers über eine horizontale Ebene. Auszug aus der Inaugural-dissertation	104
R 7.	F. SCHUH. Over de beweging van een materieel deeltje in een vlak eenparig roteerend krachtenveld. . .	123
R 1 e.	F. J. VAES. Een vraagstuk betreffende stangenvierhoeken	177
K 5 a, b.	H. A. W. SPECKMAN. Over omgekeerd gelijkvormige driehoeken, perspectief gelegen	179
V 9.	Erratum.	183
H 2 c γ.	J. H. M. FALKENHAGEN. Ueber das Verhalten der Integrale einer Riccattischen Gleichung in der Nähe einer singulären Stelle.	209
O 8 a, R 1 b.	F. J. VAES. Opmerkingen omtrent de beweging in een plat vlak	249
R 1 b α.	J. VAN DE GRIEND Jr. Snelheidsassen.	267
V.	T. HAYASHI. A brief history of the Japanese mathematics	296

Blz.
M^2 1 e. J. DE VRIES. Ueber Flächenbüschel n^{ter} Ordnung . 362
O 5 a. A. W. GROENMAN. Een inhoudsformule voor een groep van lichamen met twee evenwijdige grensvlakken. 365
E 5. J. G. RUTGERS. Over de bepaalde integraal $\int_0^1 e^{-qz} z^{p-1} dz$ 368
I 3 c. W. MANTEL. Résidus quadratiques de polynômes. . 374
R 9 d. F. J. VAES. Krukbeweging 387
M^3. Médaille Guccia 389

Bibliographie.

F. Dr. G. SCHOUTEN. Inleiding tot de studie der elliptische functiën van Weierstrass. Delft, J. Waltman Jr., 1902.
D 2. MAURICE GODEFROY. Théorie élémentaire des séries, Paris, Gauthier-Villars, 1903 67
Q 2. Dr. P. H. SCHOUTE. Mehrdimensionale Geometrie. Erster Teil. Die linearen Räume. Sammlung Schubert XXXV, Leipzig, G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, 1902 68
V 1 a, 10. INTERNATIONALE CATALOGUE OF SCIENTIFIC LITERATURE. First Annual Issue. A. Mathematics. London, Harrison and Sons, 1902 71
R. N. C. GROTENDORST. Verzameling van vraagstukken ter oefening in de Beginselen der Mechanica. Breda. De Koninklijke Militaire Academie, 1903 73
C 1, 2. Dr. ROBERT FRICKE. Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung, als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen zusammengestellt. 3te Auflage. Braunschweig, Friedrich Vieweg und Sohn, 1902. 74
A, B. A. CAPELLI. Istituzioni di analisi algebrica. Terza edizione con aggiunte delle „Lezioni di algebra complementare", Napoli, B. Pellerano, 1902 74
K 7, P 1, 2. F. AMODEO. Elementi di geometria proiettiva, appunti delle lezioni dettate nella R. Università di Napoli. Seconda edizione accresciuta e migliorata. Napoli, L. Alvano, 1902 75
K 22, 23. N. C. GROTENDORST en J. W. C. BEELENKAMP. Gronden der beschrijvende meetkunde van J. Badon Ghyben. 8ste druk. Tweede deel, tekst en atlas. Breda, 1902 76
V 9, Q 1 b. Joannes Bolyai in memoriam. Libellus post saeculum, quam Joannes Bolyai de Bolya anno 1902 a.d. 18 kalendas Januarius Claudiopoli natus est, ad celebrandam memoriam eius immortalem, ex consilio ordinos mathematicorum et naturae scrutatorem regiae litterarum Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae Claudiopolitanae editus. Claudiopoli, 1902 77

Blz.

V 9, Q 1 b. Joannis Bolyai de Bolya Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate axiomatis 11. Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem: adiecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica. Editio nova oblata ab Academia Scientiarum Hungarica ad diem natalem centesimum auctoris concelebrandum. Ediderant Josephus Kürschák, Mauritius Réthy, Bela Tötössy de Zepetnek. Budapestini, 1902 79

X 3. M. D'OCAGNE. Exposé synthétique des principes fondamentaux de la Nomographie. Paris, Gauthier-Villars, 1903 189

H 1, 2. H. DULAC. Recherches sur les points singuliers des équations différentielles. Paris, Gauthier-Villars, 1903. 191

D 6 j. G. ROBIN. Œuvres scientifiques, réunies et publiées par Louis Raffy. Théorie nouvelle des fonctions exclusivement fondée sur l'idée de nombre. Paris, Gauthier-Villars, 1903 191

V 1, I 1, Q 1. H. LAURENT. Sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres et de la géométrie. Recueil Scientia, no. 20. Paris, C. Naud, 1902 192

S 4 b. L. DÉCOMBE. La compressibilité des gaz réels. Recueil Scientia, no. 21. Paris, C. Naud, 1903 193

S 4. J. W. GIBBS. Diagrammes et surfaces thermodynamiques. Traduction de M. G. Roy avec une introduction de M. B. Brunhes. Recueil Scientia, no. 22. Paris, C. Naud, 1903 194

V 10. Annuaire pour l'an 1904, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars 194

J 2. N. C. GROTENDORST. Beginselen der waarschijnlijkheidsrekening en van de theorie der fouten. Breda, de Kon. Mil. Academie, 1903 195

Q 2. E. JOUFFRET. Traité élémentaire de Géométrie à quatre dimensions et introduction à la Géométrie de *n* dimensions. Paris, Gauthier-Villars, 1903 195

R 6. J. PERRIN. Traité de Chimie Physique. Tome I. Les principes. Paris, Gauthier-Villars, 1903. 197

Q 2. L. SCHLÄFLI. Theorie der vielfachen Kontinuität. Herausgegeben von J. H. Graf. Bern, 1903 199

J 2 e. J. C. KAPTEYN. Skew frequency curves in biology and statistics. Groningen, P. Noordhoff, 1903 206

B 12 a, K 6 c, 7. A. DEL RE. Geometria proiettiva ed analitica. Modena, Vincenzi, 1902 208

S 4, T 3, 4. J. BOUSSINESQ. Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la Théorie mécanique de la lumière. II. Paris, Gauthier-Villars, 1903. 284

T 7. M. BRILLOUIN. Propagation de l'électricité. Histoire et théorie. Paris, Hermann, 1904 286

Blz.

T 3. H. CHIPART. La théorie gyrostatique de la lumière. Paris, Gauthier-Villars, 1904. 287

S 2. J. HADAMARD. Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique. Paris, Hermann, 1903 289

S 2. P. DUHEM. Recherches sur l'hydrodynamique. Paris, Gauthier-Villars, 1904 290

S 4. M. L. MARCHIS. Thermodynamique. Paris, Gauthier-Villars, Grenoble, A. Gratier et J. Rey, 1904. . . . 292

R, V. E. MACH. La mécanique. Exposé historique et critique de son développement. Traduction de E. Bertrand. Paris, Hermann, 1904 293

B 12 d. A. MACFERLANE. Bibliography of quaternions and allied systems of mathematics. Dublin, University Press, 1904 294

T 7 d. H. POINCARÉ. La Théorie de Maxwell et les ondes Hertziennes. La télegraphie sans fil. Paris, C. Naud, 1904. 295

C 1, 2. N. C. GROTENDORST. Beginselen der Differentiaal- en Integraalrekening. Tweede verbeterde druk. Breda, de Kon. Mil. Academie, 1904. 391

C 2 h. G. LEJEUNE—DIRICHLET's Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen, herausgegeben von G. Arendt. Braunschweig, F. Vieweg und Sohn, 1904 392

A 1, 2, K 20. J. J. VAN LAAR. Lessen over de lagere algebra. Twee deelen. Amsterdam, S. L. van Looy. 394

I 1—4. W. MANTEL. Getallenleer. Haarlem, de Erven F. Bohn, 1904. 395

T, I 2 b. Oeuvres scientifiques de L. LORENTZ, revues et annotées par H. VALENTINER. Publiées aux frais de la fondation Carlsberg. Tome II, 2ième fascicule. Copenhague, Librairie Lehmann et Stage, 1904 396

Q 1. G. LECHALAS. Introduction à la géométrie générale. Paris, Gauthier-Villars, 1904. 397

A, B 1, D 2, 6. LOBATTO's lessen over de hoogere algebra. Zesde druk, opnieuw bewerkt door A. E. RAHUSEN. Sneek, J. F. van Druten, 1904. 398

Q 2, K 23 a. H. DE VRIES. Die Lehre von der Zentralprojection im vier dimensionalen Raume. Leipzig, G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, 1904 399

K 22 a. Leerboek der beschrijvende meetkunde door Prof. dr. A. J. VAN PESCH. Derde druk, bewerkt door P. WIJDENES. Oefenbladen. Methodisch gerangschikte verzameling van 350 vraagstukken uit de beschrijvende meetkunde door P. WIJDENES. Deventer, Ch. Dixon, 1904. 402

J 4. J. A. DE SÉGUIER. Théorie des groupes finis. Éléments de la théorie des groupes abstraits. Paris, Gauthier-Villars, 1904. 403

V 10. Annuaire pour l'an 1905, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars. 404

NIEUW ARCHIEF

VOOR

WISKUNDE

UITGEGEVEN DOOR HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP
TE AMSTERDAM

ONDER REDACTIE VAN

J. C. KLUYVER, D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE

TWEEDE REEKS
DEEL VI
EERSTE STUK

AMSTERDAM
DELSMAN EN NOLTHENIUS
1903

Annals of Math.

DE CONFOCALE KWADRATISCHE RUIMTEN IN DE RUIMTE VAN VIER AFMETINGEN,

DOOR

A. TOXOPEUS.
(Groningen.)

(Uittreksel uit het bekroonde prijsantwoord op vraag 8, 1901).

---

§ 1. Het stelsel confocale kwadratische ruimten. Hoofdhoofdbrandpunten, hoofdbrandpunten-kegelsneden en brandpunten-oppervlakken.

De vergelijking

$$\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}+\frac{w^2}{D}=1 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

omvat alle mogelijke hyperelliptische, elliptisch-hyperbolische, hyperhyperbolische en hyperbolische ruimten in de ruimte van vier afmetingen R_4, indien A, B, C, D willekeurige bestaanbare constanten zijn.

Een brandpunt is het middelpunt eener hyperspheer, die de kwadratische ruimte R^2 dubbel aanraakt in de twee punten, waarin de richtlijn van het brandpunt de R^2 ontmoet. Hierbij ontstaat de richtlijn als doorsnee van drie ruimten.

Analytisch bepalen wij een brandpunt α, β, γ, δ van R^2 door middel van de vergelijking

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2+(w-\delta)^2=px^2+qy^2+rz^2,$$

of in woorden:

Het vierkant van den afstand van een punt der kwadratische ruimte R^2 *tot een brandpunt is gelijk aan de som van de vierkanten der afstanden tot drie onderling loodrechte ruimten, waarbij ieder afstand met een factor vermenigvuldigd moet worden.*

Aan de hand van deze vergelijking en van art. 147 van SALMON's *Geometry of three dimensions*, derde druk, vindt men

$$\frac{\alpha^2}{A-D}+\frac{\beta^2}{B-D}+\frac{\gamma^2}{C-D}=1\ ,\ \delta^2=0\ \ .\ .\ (2)$$

Indien $A > B > C > D$ is, stelt deze vergelijking een ellipsoïde voor, welke confocaal met de eerste hoofddoorsnede der R^2 is.

Evenzoo heeft men nog in de *yzw*-ruimte:

$$-\frac{y^2}{A-B}-\frac{z^2}{A-C}-\frac{w^2}{A-D}=1\ ,\ x^2=0\,;\ .\ .\ (3)$$

in de *zwx*-ruimte:

$$\frac{x^2}{A-B}-\frac{z^2}{B-C}-\frac{w^2}{B-D}=1\ ,\ y^2=0\,;\ .\ .\ (4)$$

in de *wxy*-ruimte:

$$\frac{x^2}{A-C}+\frac{y^2}{B-C}-\frac{w^2}{C-D}=1\ ,\ z^2=0\,;\ .\ .\ (5)$$

waarvan het eerste brandpuntenoppervlak onbestaanbaar, het tweede een hyperboloïde met een blad en het derde een hyperboloïde met twee bladen is.

Gemakkelijk blijkt ook, dat de R^2 de volgende hoofdbrandpuntenkegelsneden bezit:

$$\frac{x^2}{A-C}+\frac{y^2}{B-C}=1,\ \frac{x^2}{A-D}+\frac{z^2}{C-D}=1,\ \frac{x^2}{A-D}+\frac{y^2}{B-D}=1,(6)$$

$$\frac{x^2}{A-B}-\frac{z^2}{B-C}=1,\ \frac{x^2}{A-C}-\frac{w^2}{C-D}=1,\ \frac{x^2}{A-B}-\frac{w^2}{B-D}=1,(7)$$

waarvan de eerste drie ellipsen, de tweede drie hyperbolen zijn. Tevens ziet men, dat zij tot de scharen

$$\frac{x^2}{A-k}+\frac{y^2}{B-k}=1\ ,\ \frac{x^2}{A-k}+\frac{z^2}{C-k}=1\ ,\ \frac{x^2}{A-k}+\frac{w^2}{D-k}=1$$

behooren, waartoe eveneens de hoofddoorsneden van de brandpuntenoppervlakken behooren.

Denkende aan de vergelijkingen van de hoofddoorsneden en de hoofdbrandpuntenkegelsneden erkent men, dat de brand-

puntenellipsoïde door de brandpuntenellips van de brandpunten-hyperboloïde met twee bladen gaat, welke in het xz-vlak ligt, terwijl de brandpuntenhyperboloïde met twee bladen door de brandpuntenhyperbool van de brandpuntenellipsoïde gaat, welke in het xz-vlak ligt.

Overeenkomstige betrekkingen bestaan er tusschen de twee andere paren van brandpuntenoppervlakken.

De R^2 bezit zes bestaanbare hoofdhoofdbrandpunten.

§ 2. De beteekenis van de confocale kwadratische ruimten.

Indien wij er voor zorgen, dat de verschillen van de paren overeenkomstige constanten (A, A_1), (B, B_1), (C, C_1), (D, D_1) van twee R^2's uit het viervoudig oneindig aantal door (1) voorgesteld dezelfde zijn, dan bezitten deze R^2's dezelfde brandpuntenoppervlakken, dezelfde hoofdbrandpuntenkegelsneden en dezelfde hoofdhoofdbrandpunten. Analytisch zijn de voorwaarden:

$$A - A_1 = B - B_1 = C - C_1 = D - D_1 = \lambda,$$

d. i.

$$A_1 = A - \lambda, \quad B_1 = B - \lambda, \quad C_1 = C - \lambda, \quad D_1 = D - \lambda.$$

Hieruit ziet men, dat de constanten van de tweede R^2 door de vier constanten der eerste R^2 en een parameter λ bepaald zijn. Wij verkrijgen dus een enkelvoudig oneindig aantal R^2's met de vergelijking:

$$\frac{x^2}{A-\lambda} + \frac{y^2}{B-\lambda} + \frac{z^2}{C-\lambda} + \frac{w^2}{D-\lambda} = 1 \quad . \quad . \quad (8)$$

Voor dit confocale stelsel van kwadratische ruimten stellen de vergelijkingen (2), (3), (4), (5) de vier brandpuntenoppervlakken voor, terwijl de zes vergelijkingen (6) en (7) de hoofdbrandpuntenkegelsneden weergeven. En de bestaanbare hoofdhoofdbrandpunten liggen ten getale van zes op afstanden van $\sqrt{(A - B)}$, $\sqrt{(A - C)}$, $\sqrt{(A - D)}$ van den oorsprong verwijderd.

In tangentiale coördinaten wordt (8):

$$Au^2 + Bv^2 + C\rho^2 + D\sigma^2 - 1 - \lambda(u^2 + v^2 + \rho^2 + \sigma^2) = 0. \quad (9)$$

Hierin stelt $Au^2 + Bv^2 + C\rho^2 + D\sigma^2 - 1 = 0$ de tangentiale vergelijking der uitgekozene R^2 en $u^2 + v^2 + \rho^2 + \sigma^2 = 0$ de

tangentiale vergelijking voor van den onbestaanbaren bol in het oneindige, die aan alle hyperspheren gemeen is. Ieder R^2 behoort dus tot de schaar (9) en raakt aan de *ontwikkelbare ruimte*, welke voortgebracht wordt door de beweging van een ruimte, die de uitgekozene R^2 en den onbestaanbaren bol in het oneindige aanraakt. Verder behooren tot deze schaar vier tot oppervlakken afgeplatte ruimten, n.l. die, waarvoor λ achtereenvolgens de waarden A, B, C, D bezit; zij stellen de vier brandpuntenoppervlakken voor.

§ 3. Ligging der hoofdbrandpuntenkegelsneden en de brandpuntenoppervlakken met betrekking tot de vlakke hoofdsneden en de ruimtehoofdsneden.

Om voor de vergelijking (8) de waarden $\lambda = A, B, C, D$ niet te behoeven uitsluiten, zullen wij voor (8) een gelijkwaardige vergelijking schrijven, welke voor alle waarden van λ geldt, nl.

$$(A-\lambda)(B-\lambda)(C-\lambda)(D-\lambda)\left\{\frac{x^2}{A-\lambda}+\frac{y^2}{B-\lambda}+\frac{z^2}{C-\lambda}+\frac{w^2}{D-\lambda}-1\right\}=0. \quad (10)$$

Daardoor worden de dubbelruimten $x^2 = 0$, $y^2 = 0$, $z^2 = 0$, $w^2 = 0$, welke met de waarden $\lambda = A, B, C, D$ overeenkomen, als oneigenlijke ruimten in de confocale schaar ingelascht.

Al naarmate

$$+\infty > A - \lambda > A - D, \text{ of } A - D > A - \lambda > A - C,$$

of

$$A - C > A - \lambda > A - B, \text{ of } A - B > A - \lambda > 0 \text{ is},$$

is de ruimte der schaar een hyperelliptische, een elliptisch-hyperbolische, een hyperhyperbolische of een hyperbolische ruimte; hiermee gaat samen, dat de toppunten op de eerste hoofdas buiten de uiterste hoofdhoofdbrandpunten vallen of tusschen het tweede en derde paar of tusschen het eerste en tweede paar of binnen de drie paren hoofdhoofdbrandpunten. Gemakkelijk ziet men, dat bij de hyperelliptische ruimten de eerste vlakke hoofddoorsnede buiten de twee hoofdbrandpuntenellipsen ligt, terwijl de tweede vlakke hoofddoorsnee buiten de hoofdbrandpuntenellips ligt. Evenzoo blijkt gemakkelijk èn uit de vergelijking èn uit een teekening, dat de brandpunten-

ellipsoïde geheel binnen de eerste hoofddoorsnee der hyperelliptische ruimten, geheel buiten de eerste hoofddoorsnede der elliptisch-hyperbolische ruimten ligt. Meerdere resultaten moeten hier achterwege blijven. Voor de teekening neemt men in het vlak twee onderling loodrechte lijnen, die men als x, y, z, w-as beschouwt.

§ 4. De vier scharen kwadratische ruimten van het algemeen confocale stelsel.

Wij noemen de parameter λ ter onderscheiding van de vier soorten voor de hyperelliptische ruimten k, voor de elliptisch-hyperbolische ruimten l, voor de hyperhyperbolische ruimten m en voor de hyperbolische ruimten n.

Hierbij geldt dan

$$-\infty \leqq k \leqq D; \quad D \leqq l \leqq C; \quad C \leqq m \leqq B; \quad B \leqq n \leqq A.$$

Met behulp van (10) besluit men, terwijl men in het grensgeval $k = -\infty$ tot homogene coördinaten en homogene parameters overgaat, tot de resultaten:

Het algemeen stelsel (10) *van confocale* R^2*'s splitst zich in vier scharen van gelijknamige* R^2*'s, waarvan de parameterwaarden en de vergelijkingen aan het volgende voldoen:*

Hyperelliptische ruimten.

$$k = -\infty \quad : \quad p^2 = 0, \qquad \ldots \ldots \qquad (11)$$

$$-\infty < k < D : \quad \frac{x^2}{A-k} + \frac{y^2}{B-k} + \frac{z^2}{C-k} + \frac{w^2}{D-k} = 1,$$

$$k = D \quad : \quad \frac{x^2}{A-D} + \frac{y^2}{B-D} + \frac{z^2}{C-D} \leqq 1, \; w^2 = 0.$$

Elliptisch-hyperbolische ruimten.

$$l = D \quad : \quad \frac{x^2}{A-D} + \frac{y^2}{B-D} + \frac{z^2}{C-D} \geqq 1, \; w^2 = 0,$$

$$D < l < C \quad : \quad \frac{x^2}{A-l} + \frac{y^2}{B-l} + \frac{z^2}{C-l} + \frac{w^2}{D-l} = 1,$$

$$l = C \quad : \quad \frac{x^2}{A-C} + \frac{y^2}{B-C} - \frac{w^2}{C-D} \leqq 1, \; z^2 = 0.$$

Hyperhyperbolische ruimten.

$$m = C \quad : \quad \frac{x^2}{A-C} + \frac{y^2}{B-C} - \frac{w^2}{C-D} \geqq 1, \; z^2 = 0,$$

$$C < m < B \quad : \quad \frac{x^2}{A-m} + \frac{y^2}{B-m} + \frac{z^2}{C-m} + \frac{w^2}{D-m} = 1,$$

$$m = B \quad : \quad \frac{x^2}{A-B} - \frac{z^2}{B-C} - \frac{w^2}{B-D} \leqq 1, \; y^2 = 0.$$

Hyperbolische ruimten.

$$n = B \quad : \quad \frac{x^2}{A-B} - \frac{z^2}{B-C} - \frac{w^2}{B-D} \geqq 1, \; y^2 = 0,$$

$$B < n < A \quad : \quad \frac{x^2}{A-n} + \frac{y^2}{B-n} + \frac{z^2}{C-n} + \frac{w^2}{D-n} = 1,$$

$$n = A \quad : \quad x^2 = 0.$$

Gemakkelijk vindt men nu, hoeveel R^2's door een gegeven punt x, y, z, w gaan, waarbij $x.y.z.w \neq 0$ is. Want het eerste lid van vergelijking (10) wordt achtereenvolgens voor $-\infty$, D, C, B, A : $-\infty < 0$, $(A-D)(B-D)(C-D)w^2 > 0$, $(D-C)(A-C)(B-C)z^2 < 0$, $(C-B)(D-B)(A-B)y^2 > 0$, $(D-A)(C-A)(B-A)x^2 < 0$, zoodat de vergelijking (10) vier bestaanbare wortels heeft, welke liggen tusschen de grenzen $-\infty$ en D, D en C, C en B, B en A en weergegeven worden door k, l, m, n. Wij besluiten, dat door ieder punt der hyperruimte een R^2 van een der vier soorten gaat.

Ligt het gegeven punt in de eerste ruimtehoofddoorsnede, zoodat $w = 0$ en $x.y.z \neq 0$ is, dan heeft men voor (10) den vorm

$$(D-\lambda)(A-\lambda)(B-\lambda)(C-\lambda) \left\{ \frac{x^2}{A-\lambda} + \frac{y^2}{B-\lambda} + \frac{z^2}{C-\lambda} - 1 \right\} = 0.$$

Steeds is een wortel $\lambda = D$. Verder blijkt gemakkelijk, dat een der wortels tusschen A en B en een tusschen B en C ligt. De vierde ligt of tusschen D en C of tusschen D en $-\infty$ of is D zelve, al naarmate

$$(A-\lambda)(B-\lambda)(C-\lambda) \left\{ \frac{x^2}{A-\lambda} + \frac{y^2}{B-\lambda} + \frac{z^2}{C-\lambda} - 1 \right\}$$

< 0 of > 0 of $= 0$ is, al naarmate dus het punt x, y, z,

binnen de grensruimte $k = \mathrm{D}$ of binnen de grensruimte $l = \mathrm{D}$ of op deze grensruimten beide ligt, d. w. z. op de gemeenschappelijke grens van beide, d. i. op de brandpuntenellipsoïde. Dientengevolge gaan door dat punt een eigenlijke hyperbolische ruimte n, een eigenlijke hyperhyperbolische ruimte m; in het eerste geval nog de hyperelliptische ruimte $k = \mathrm{D}$, welke aan den wortel $\lambda = \mathrm{D}$ beantwoordt en een eigenlijke elliptisch-hyperbolische ruimte; in het tweede geval nog een eigenlijke hyperelliptische ruimte en de elliptisch-hyperbolische ruimte $l = \mathrm{D}$, welke aan den wortel $\lambda = \mathrm{D}$ beantwoordt; en in het derde geval nog de hyperelliptische ruimte $k = \mathrm{D}$ en de elliptisch-hyperbolische ruimte $l = \mathrm{D}$, welke aan den dubbelwortel $\lambda = \mathrm{D}$ beantwoordt; dus in ieder geval een kwadratische ruimte uit ieder der vier scharen.

Verdere gevallen zullen wij hier niet behandelen.

TWEEDE HOOFDSTUK.

DE HYPERELLIPTISCHE COÖRDINATEN DER HYPERRUIMTE.

---

§ 5. **De beteekenis en de soorten van hyperelliptische hyperruimtecoördinaten.**

De parameters van vier ongelijksoortige R^2's, welke door een punt van R_4 gaan, heeten als kromlijnige coördinaten van het punt de hyperelliptische coördinaten, waarvoor geldt:

Ieder punt der hyperruimte heeft vier bepaalde hyperelliptische coördinaten k, l, m, n, welke, wanneer de gewone coördinaten x, y, z, w gegeven zijn, wortels van de vergelijking (10) zijn en voldoen aan de vermelde ongelijkheden.

Tusschen de hyperelliptische en de gewone rechthoekige coördinaten van eenzelfde punt bestaat de volgende betrekking:

$$(\mathrm{A}-\lambda)(\mathrm{B}-\lambda)(\mathrm{C}-\lambda)(\mathrm{D}-\lambda)\left\{\frac{x^2}{\mathrm{A}-\lambda}+\frac{y^2}{\mathrm{B}-\lambda}+\frac{z^2}{\mathrm{C}-\lambda}+\frac{w^2}{\mathrm{D}-\lambda}-1\right\}=$$

$$= -(\lambda-k)(\lambda-l)(\lambda-m)(\lambda-n) \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Hieruit volgen voor $\lambda = k$, l, m, n de betrekkingen:

$$\left.\begin{aligned}
(A-k)(B-k)(C-k)(D-k)\left\{\frac{x^2}{A-k}+\frac{y^2}{B-k}+\frac{z^2}{C-k}+\frac{w^2}{D-k}-1\right\}&=0,\\
(A-l)(B-l)(C-l)(D-l)\left\{\frac{x^2}{A-l}+\frac{y^2}{B-l}+\frac{z^2}{C-l}+\frac{w^2}{D-l}-1\right\}&=0,\\
(A-m)(B-m)(C-m)(D-m)\left\{\frac{x^2}{A-m}+\frac{y^2}{B-m}+\frac{z^2}{C-m}+\frac{w^2}{D-m}-1\right\}&=0,\\
(A-n)(B-n)(C-n)(D-n)\left\{\frac{x^2}{A-n}+\frac{y^2}{B-n}+\frac{z^2}{C-n}+\frac{w^2}{D-n}-1\right\}&=0,
\end{aligned}\right\}\quad(13)$$

welke ieder een elliptische coördinaat bevatten en voor $\lambda = A, B, C, D$ verkrijgt men de betrekkingen:

$$\left.\begin{aligned}
x^2&=\frac{(A-k)(A-l)(A-m)(A-n)}{(A-B)(A-C)(A-D)},\quad y^2=\frac{(B-k)(B-l)(B-m)(B-n)}{(B-C)(B-D)(B-A)},\\
z^2&=\frac{(C-k)(C-l)(C-m)(C-n)}{(C-D)(C-A)(C-B)},\quad w^2=\frac{(D-k)(D-l)(D-m)(D-n)}{(D-A)(D-B)(D-C)},
\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

welke ieder een gewone coördinaat bevatten.

Daar de laatste vergelijkingen x, y, z, w tweewaardig bepalen, hebben wij:

I. *Vier willekeurige hyperelliptische coördinaten, die aan bovengenoemde voorwaarden voldoen, bepalen zestien punten van de hyperruimte, waarvan de gewone coördinaten de voorgaande waarde bezitten.*

Steeds geldt:

II. *Voor een punt van de brandpuntenellipsoïde is* $k = l = D$; *voor een punt van de brandpuntenhyperboloïde met een blad is* $l = m = C$; *voor een punt op de brandpuntenhyperboloïde met twee bladen is* $m = n = B$.

Verder bizondere ligging van het beschouwde punt en de daaruit voortvloeiende waarde voor zijne hyperelliptische coördinaten zullen hier niet beschouwd worden.

§ 6. De hyperelliptische coördinaten van een lijnelement.

Tusschen de gewone coördinaten x, y, z, w, dx, dy, dz, dw en de hyperelliptische coördinaten k, l, m, n, dk, dl, dm, dn

van een lijnelement bestaat de volgende betrekking, die in λ identiek is en uit (12) volgt:

$$\left.\begin{array}{l}(A-\lambda)(B-\lambda)(C-\lambda)(B-\lambda)\left\{\dfrac{2xdx}{A-\lambda}+\dfrac{2ydy}{B-\lambda}+\dfrac{2zdz}{C-\lambda}+\dfrac{2wdw}{D-\lambda}\right\}= \\ =-(\lambda-k)(\lambda-l)(\lambda-m)(\lambda-n)\left\{\dfrac{dk}{\lambda-k}+\dfrac{dl}{\lambda-l}+\dfrac{dm}{\lambda-m}+\dfrac{dn}{\lambda-n}\right\}.\end{array}\right\}(15)$$

Hieruit volgt voor $\lambda = k$:

$$\left.\begin{array}{l}-(k-l)(k-m)(k-n)dk= \\ =2(A-k)(B-k)(C-k)(D-k)\left\{\dfrac{xdx}{A-k}+\dfrac{ydy}{B-k}+\dfrac{zdz}{C-k}+\dfrac{wdw}{D-k}\right\},\end{array}\right\}(16)$$

en drie dergelijke vergelijkingen voor $\lambda = l, m, n$ en voor $\lambda = A$:

$$\left.\begin{array}{l}2(B-A)(C-A)(D-A)\,xdx= \\ =-(A-k)(A-l)(A-m)(A-n)\left\{\dfrac{dk}{A-k}+\dfrac{ld}{A-l}+\dfrac{dm}{A-m}+\dfrac{dn}{A-n}\right\},\end{array}\right\}(17)$$

en drie dergelijke voor $\lambda = B, C, D$.

De formules (16) drukken de vier laatsten der acht hyperelliptische coördinaten van het lijnelement door de vier laatsten der acht gewone coördinaten uit, waarbij tusschen de vier eerste coördinaten van de eerste soort en de vier eersten van de tweede soort (13) en (14) bestaan. Slechts als het beginpunt k, l, m, n van het lijnelement op de brandpuntenellipsoïde $k = l = D$ ligt, worden dk en dl onbepaald; iets dergelijks geldt in andere bizondere gevallen.

Het rechterlid van (16) is de differentiaal van het linkerlid van de eerste vergelijking (13), waaruit volgt:

I. *De coördinaat dk van een lijnelement verdwijnt slechts dan, wanneer het element met zijn beginpunt k, l, m, n in de gebogen coördinaatruimte ligt; dus tot een raaklijn aan de hyperelliptische ruimte behoort.*

Gemakkelijk vindt men met behulp van (16) en (17) door speciale waarden van k, l, m of n:

II. *Zijn de hyperelliptische coördinaten van een in de xyz-ruimte*

gelegen lijnelement D, l, m, n, o, dl, dm, dn *of* k, D, m, n, dk, o, dm, dn, *dan zijn zijne elliptische coördinaten dier ruimte met betrekking tot de confocale schaar in die ruimte* k', m, n, dk', dm, dn.

Een uitzondering maken op dezen regel de lijnelementen $k = l = \mathrm{D}$, omdat dan dk en dl onbepaald zijn, terwijl dk' onbepaald is.

Dergelijke resultaten voor andere hoofdruimten en hoofdvlakken zullen hier weggelaten worden.

De formules (17) geven ons voor de partiëele differentiaalquotienten

$$x_1 = -\frac{x}{2(\mathrm{A}-k)}, \quad x_2 = -\frac{x}{2(\mathrm{A}-l)},$$

$$x_3 = -\frac{x}{2(\mathrm{A}-m)}, \quad x_4 = -\frac{x}{2(\mathrm{A}-n)},$$

enz.

Met behulp van vergelijking (12), (13) verkrijgt men door eenvoudige bewerkingen en voor speciale waarden van λ na substitutie van bovenstaande partiëele differentiaalquotienten

$$x_4x_1 + y_4y_1 + z_4z_1 + w_4w_1 = 0$$

en vijf dergelijke vergelijkingen door andere combinatie van de indices twee aan twee.

Hieruit volgt:

III. *De hyperelliptische coördinaten zijn orthogonale coördinaten.*

§ 7. De assen van een punt in het hyperelliptische hyperruimtecoördinatenstelsel.

Wij noemen de assen ξ, η, ζ, ϑ van een punt $\mathrm{P} = k, l, m, n$ in het hyperelliptische coördinatenstelsel de positieve raaklijnen van de coördinaatkrommen. Zij hebben met betrekking tot het coördinatenstelsel $Oxyzw$ de richtingscosinussen, welke aan het volgende schema voldoen:

$$\left.\begin{array}{c|cccc}
 & x & y & z & w \\
\hline
\xi & -\dfrac{x}{2h_1(A-k)} & -\dfrac{y}{2h_1(B-k)} & -\dfrac{z}{2h_1(C-k)} & -\dfrac{w}{2h_1(D-k)} \\[2ex]
\eta & -\dfrac{x}{2h_2(A-l)} & -\dfrac{y}{2h_2(B-l)} & -\dfrac{z}{2h_2(C-l)} & -\dfrac{w}{2h_2(D-l)} \\[2ex]
\zeta & -\dfrac{x}{2h_3(A-m)} & -\dfrac{y}{2h_3(B-m)} & -\dfrac{z}{2h_3(C-m)} & -\dfrac{w}{2h_3(D-m)} \\[2ex]
\vartheta & -\dfrac{x}{2h_4(A-n)} & -\dfrac{y}{2h_4(B-n)} & -\dfrac{z}{2h_4(C-n)} & -\dfrac{w}{2h_4(D-n)}
\end{array}\right\} \quad (18)$$

waar $h_1 = \sqrt{(x_1^2+y_1^2+z_1^2+w_1^2)} = \frac{1}{2}\sqrt{\dfrac{(k-l)(k-m)(k-n)}{(A-k)(B-k)(C-k)(D-k)}}$ en h_2, h_3, h_4 overeenkomstige grootheden zijn.

Deze richtingscosinussen kan men zich door de waarden van (14) voor x, y, z, w en de waarden van h_1, h_2, h_3, h_4 in (18) te substitueeren volkomen in de hyperelliptische coördinaten van het punt uitgedrukt denken. Men kan zich, daar de normaal in die richting positief is, waarbij de hyperelliptische coördinaten k, l, m, n groeien, nog een andere voorstelling van het confocale stelsel in § 4 vormen. Daar namelijk van twee hyperelliptische ruimten, die met de grootste k de binnenste is, moet de positieve normaal ξ van de hyperelliptische ruimte k haar inwendige normaal zijn, enz.

Als men in het voorgaande ter bepaling van de positieve raaklijnen ξ, η, ζ, ϑ van de coördinaatkrommen de parameters in II, § 5 als grondslag neemt, dan onderstelt men daarbij, dat voor de functie in II, § 5 voor naburige waarden k, l, m, n van k, l, m, n de ontwikkeling van Taylor achtereenvolgens naar geheele machten van $k_1 - k$, $l_1 - l$, $m_1 - m$, $n_1 - n$ geldt. Deze onderstellingen zijn voor een punt k, l, m, n buiten de vier coördinatenruimten overal vervuld, zoodat wij de volgende stellingen verkrijgen:

I. *Het assenstelsel* ξ, η, ζ, ϑ *van een punt* $P = k, l, m, n$, *dat buiten de vier hoofdruimten ligt, is door de formules* (18) *eenwaardig bepaald. Het bestaat uit de positieve normalen der vier eigenlijke gebogen* R^3*'s in het punt* P.

II. *Een lijnelement met de hyperelliptische coördinaten* k, l,

m, n, dk, dl, dm, dn, waarvan het beginpunt buiten de coördinaatruimten ligt, heeft de volstrekte waarde:

$$do = \sqrt{(h_1^2dk^2 + h_2^2dl^2 + h_3^2dm^2 + h_4^2dn^2)}$$

en zijn richtingscosinussen p_1, p_2, p_3, p_4 *met betrekking tot de assen* ξ, η, ζ, ϑ *van het punt k, l, m, n hebben de waarde*

$$p_1 = \frac{h_1dk}{do}, \; p_2 = \frac{h_2dl}{do}, \; p_3 = \frac{h_3dm}{do}, \; p_4 = \frac{h_4dn}{do}.$$

Door het teeken van dk, dl, dm, dn zijn dus de richtingscosinussen volkomen bepaald.

Verder hebben wij voor de hoofdruimten:

III. *Het assenstelsel* ξ, η, ζ, ϑ *van een punt* P = *k, l, m, n, dat in een hoofdruimte ligt en niet op een hoofdbrandpuntenkegelsnede valt, wordt tweewaardig bepaald. Het bestaat uit de positieve normalen der drie eigenlijke gebogen coördinaatruimten van het punt* P *en de normaal op die hoofdruimte.*

Steeds geldt:

IV. *Die drie van de vier assen* ξ, η, ζ, ϑ *van een punt* P *in de eerste, tweede, derde of vierde hoofdruimte, welke in deze hoofdruimte vallen, zijn tegelijk de assen* ξ, η, ζ *van het punt in de elliptische coördinaten van deze ruimte.*

Gemakkelijk ziet men in:

V. *Als wij de grenswaarden van* h_1dk, h_2dl, h_3dm, h_4dn *gebruiken, behouden de formules* (16) *en* (17) *ook voor zulke lijnelementen hunne beteekenis, waarvan het beginpunt k, l, m, n in een hoofdruimte ligt, terwijl zij niet op een hoofdbrandpuntenkegelsnede of in een hoofdhoofdbrandpunt valt. Een der richtingscosinussen is tweewaardig of nul.*

Wij geven ook nog:

VI. *Het assenstelsel* ξ, η, ζ, ϑ *van een punt* P = *k, l, m, n, dat op de brandpuntenellipsoïde, op de brandpuntenhyperboloïde met een blad of op de brandpuntenhyperboloïde met twee bladen ligt, is oneindig veelwaardig. Het bestaat uit de positieve normaal van de twee eigenlijke gebogen coördinaatruimten in het punt* P, *tegelijk de raaklijnen aan de kromtelijnen en nog twee onderling loodrechte assen, welke in het vlak loodrecht op het vlak der eerste twee liggen.*

§ 8. De snijpunten van een rechte lijn met de confocale schaar.

Ieder punt der verbindingslijn van twee punten $P_1 = x_1, y_1, z_1, w_1 = k_1, l_1, m_1, n_1$ en $P_2 = x_2, y_2, z_2, w_2 = k_2, l_2, m_2, n_2$ heeft de coördinaten van den vorm $x = \frac{x_1 + \varepsilon x_2}{1 + \varepsilon}$, enz. en ligt tusschen P_1 en P_2 bij positieve ε, buiten P_1 en P_2 bij negatieve ε. De waarden, welke ε voor de snijpunten der lijn P_1P_2 met een willekeurige R^2 van de schaar (10) heeft, zijn de wortels van een tweedemachtsvergelijking. Het produkt van den bekenden term en de hoogste macht kan men op de volgende wijze uitdrukken:

$$T = (\lambda - k_1)(\lambda - l_1)(\lambda - m_1)(\lambda - n_1)(\lambda - k_2)(\lambda - l_2)(\lambda - m_2)(\lambda - n_2).$$

Is dit produkt negatief, dan zijn de wortels bestaanbaar en van verschillend teeken; dus de snijpunten der lijn P_1P_2 met de R^2 van de confocale schaar bestaanbaar en door P_1 en P_2 van elkaar gescheiden.

Laten wij de punten P_1 en P_2 met de grensvormen $k = -\infty$ en $k = D$ overeenkomen, dan vindt men:

I. *Heeft een rechte lijn met de twee grensvormen van een der vier scharen* R^2 *telkens een punt* P_1 *en* P_2 *gemeen, dan snijdt zij ieder eigenlijke* R^2 *der schaar* (10) *in twee bestaanbare punten, die door* P_1 *en* P_2 *van elkaar gescheiden zijn.*

II. *Snijdt een lijn de beide grensvormen* $k = -\infty$ *en* $k = D$ *van de hyperelliptische ruimte k ieder in een punt* Q *en* R, *dan is voor alle van* Q *naar* P *gerichte elementen der beide stukken* QP : $dk > 0$.

III. *Snijdt een lijn de beide grensvormen* $l = D$ *en* $l = C$ *der elliptisch-hyperbolische ruimte l ieder in een punt* P *en* R, *dan is voor alle van* P *naar* R *gerichte elementen van de beide stukken* PR : $dl > 0$.

IV. *Snijdt een lijn de twee grensvormen* $m = C$ *en* $m = D$ *der hyperhyperbolische ruimte m ieder in de punten* R *en* S, *dan is voor alle van* R *naar* S *gerichte elementen der beide stukken* RS : $dm > 0$.

V. *Snijdt een lijn de twee grensvormen* $n = B$ *en* $n = A$ *der hyperbolische ruimte n ieder in een punt* S *en* T, *dan is voor alle van* S *naar* T *gerichte elementen van beide stukken* ST : $dn > 0$.

DERDE HOOFDSTUK.

BRANDPUNTENKEGELRUIMTEN EN BRANDPUNTENLIJNEN IN HET CONFOCALE STELSEL.

§ 9. Beteekenis en hoofdassentransformatie der brandpuntenkegelruimte.

De drie kegelruimten, welke met een willekeurig punt P van de hyperruimte tot top en de drie brandpuntenoppervlakken van een stelsel confocale kwadratische ruimten als basis aangebracht kunnen worden, heeten de brandpuntenkegelruimten van het punt P.

Voor de vergelijking der kegelruimte van de brandpuntenellipsoïde vindt men

$$\frac{\{(W-w)x-(X-x)w\}^2}{A-D}+\frac{\{(W-w)y-(Y-y)w\}^2}{B-D}+$$
$$+\frac{\{(W-w)z-(Z-z)w\}^2}{C-D}-(W-w)^2=0.$$

Gaan wij nu deze vergelijking van het oorspronkelijk coördinatenstelsel $Oxyzw$ op de assen ξ, η, ζ, ϑ transformeeren met behulp van de formules (18), dan verkrijgen wij eerst

$$X-x=-\frac{x}{2}\left\{\frac{\xi}{h_1(A-k)}+\frac{\eta}{h_2(A-l)}+\frac{\zeta}{h_3(A-m)}+\frac{\vartheta}{h_4(A-n)}\right\},$$

enz. en na eleminatie:

I. *De vergelijking van de kegelruimte van de brandpuntenellipsoïde voor een willekeurig punt* P *met betrekking tot de assen* ξ, η, ζ, ϑ *van het punt is*

$$(D-k)(D-l)(D-m)(D-n)\left\{\frac{\xi^2}{D-k}+\frac{\eta^2}{D-l}+\frac{\zeta^2}{D-m}+\frac{\vartheta^2}{D-n}\right\}=0.$$

En uit den vorm der vergelijking volgt:

II. *De drie focaalkegelruimten van het punt* $P=k, l, m, n$ *hebben de assen* ξ, η, ζ, ϑ *tot assen.*

Deze stelling is uitgebreid, omdat de vergelijkingen der twee andere focaalkegelruimten er weinig van verschillen.

III. *De drie focaalkegelruimten van een punt* P, *dat geen*

brandpunt is, zijn drie ongelijksoortige kegelruimten van een stelsel confocale kegelruimten.

IV. *Voor een punt op de brandpuntenellipsoïde of op een der andere brandpuntenoppervlakken is de gelijksoortige focaalkegelruimte onbepaald (een lijnenschoof), de ongelijknamige zijn kegelruimten met een omwentelingsas.*

§ 10. **Focaallijnen, het lijnelement en differentiaalvergelijkingen.**

Een lijn, welke alle drie brandpuntenoppervlakken van een stelsel confocale kwadratische ruimten snijdt, heet een focaallijn van het stelsel. Door een punt P, dat geen brandpunt is, gaat een bepaald aantal focaallijnen van de drie kegelruimten. De coördinaten ξ, η, ζ, ϑ van een punt van zulk een snijlijn, waarvan de afstand tot P v moge zijn, voldoen aan

$$\xi^2 = v^2 \frac{(k-B)(k-C)(k-D)}{(k-l)(k-m)(k-n)}, \text{ enz.}$$

Daar de verhoudingen $\xi : v$, $\eta : v$, $\zeta : v$, $\vartheta : v$ de richtingscosinussen van de lijn zijn, welke P met het punt ξ, η, ζ, ϑ verbindt, verkrijgen wij

I. *De richtingscosinussen p, q, r, s van de focaallijn van het punt* P, *dat geen brandpunt is, met betrekking tot de assen* ξ, η, ζ, ϑ *worden bepaald door*

$$p^2 = \frac{(k-B)(k-C)(k-D)}{(k-l)(k-m)(k-n)}, \text{ enz.}$$

Verder heeft men:

II. *Door ieder punt buiten de ruimten van de brandpuntenoppervlakken gaan acht gemeenschappelijke focaallijnen.*

III. *Door ieder punt van de ruimte van een brandpuntenoppervlak, dat zelve geen brandpunt is, gaan vier focaallijnen, de focaallijnen van het punt in het confocale oppervlakkenstelsel van de beschouwde ruimte.*

IV. *Door ieder punt van de brandpuntenoppervlakken gaan een tweevoudig oneindig aantal focaallijnen, de beschrijvende lijnen van de kegelruimte met dat punt tot top en de andere brandoppervlakken tot basis.*

V. *De richtingscosinussen van een focaallijn van een punt* P

ten opzichte van de assen ξ, η, ζ, ϑ *van dat punt zijn*

$$p = \pm \sqrt{\frac{(k-\mathrm{B})(k-\mathrm{C})(k-\mathrm{D})}{(k-l)(k-m)(k-n)}},$$

enz., waar de teekens de richtingscosinussen volkomen bepalen.

Noemen wij een stel teekens de karakteristiek, dan verkrijgen wij 16 karakteristieken, welke bij tweeën bij een focaallijn behooren en aan de positieve en negatieve richting der focaallijn beantwoorden. Wij kunnen ze rangschikken door met betrekking tot een coördinaatruimte, tot een coördinaatvlak of tot een coördinaatas diegene bij elkaar te laten behooren, welke symmetrisch ten opzichte daarvan liggen.

Nog geven wij:

VI. *Wordt het symbool o in de karakteristiek van een focaallijn van een punt van de eerste, tweede of derde hoofdruimte in het confocale stelsel weggelaten, dan gaat hare karakteristiek over in diegene, welke de focaallijn in het confocale stelsel kwadratische oppervlakken van deze ruimte bezit.*

Met behulp van de formules (14) vindt men voor het lijnelement

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2 =$$

$$= -\tfrac{1}{4}\frac{(k-l)(k-m)(k-n)}{(\mathrm{A}-k)(\mathrm{B}-k)(\mathrm{C}-k)(\mathrm{D}-k)}dk^2 -$$

$$-\tfrac{1}{4}\frac{(l-m)(l-n)(l-k)}{(\mathrm{A}-l)(\mathrm{B}-l)(\mathrm{C}-l)(\mathrm{D}-l)}dl^2 -$$

$$-\tfrac{1}{4}\frac{(m-n)(m-k)(m-l)}{(\mathrm{A}-m)(\mathrm{B}-m)(\mathrm{C}-m)(\mathrm{D}-m)}dm^2 -$$

$$-\tfrac{1}{4}\frac{(n-k)(n-l)(n-m)}{(\mathrm{A}-n)(\mathrm{B}-n)(\mathrm{C}-n)(\mathrm{D}-n)}dn^2.$$

Indien men een kromtelijn beschouwt b.v. op de hyperelliptische ruimte, is l, m, n constant; dus

$$ds^2 = -\tfrac{1}{4}\frac{(k-l)(k-m)(k-n)}{(\mathrm{A}-k)(\mathrm{B}-k)(\mathrm{C}-k)(\mathrm{D}-k)}dk^2.$$

Wij zullen vinden, dat door ieder punt der hyperruimte 8 raaklijnen aan drie gegeven confocale kwadratische ruimten gaan. Met behulp van de vergelijkingen kan men de differen-

tiaalvergelijkingen van zoo'n raaklijn afleiden. Maar eenvoudiger komt de Heer F. KLEIN tot de differentiaalvergelijkingen van een lijn van het complex. (*Math. Ann.* 26.)

De snijpunten van een willekeurige lijn van het complex met een kwadratische ruimte van het confocale stelsel (10) vormen een algebraïschen vorm, welke op twee manieren te beschouwen is. Omdat er door ieder punt van de lijn vier kwadratische ruimten van het confocale stelsel gaan, heeft men eerstens een viervoudig bedekten algebraïschen vorm, waarvan de vertakkingspunten de snijpunten van de lijn met de omhullende gebogen ruimte van het confocale stelsel kwadratische ruimten zijn; daar de vergelijking van den vierden graad in λ is, zal dus het resultaat na eliminatie van λ van den 12den graad zijn. Men heeft dus 12 vertakkingspunten en daar volgens RIEMANN steeds $2p = v - 2m + 2$ is, is $p = 3$. Er behooren dus drie integralen van de eerste soort bij dezen algebraischen vorm. Noemt men deze integralen $\int du_1$, $\int du_2$, $\int du_3$ en vormt men ze voor de vier boven elkaar liggende bladen van een punt (k, l, m, n), dan heeft men

$$dk_i + dl_i + dm_i + dn_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Tweedens beschouwt men de twee punten, waarin een lijn een kwadratische ruimte (10) ontmoet; de algebraïsche vorm wordt dan tweemaal bedekt en zijne vertakkingsspunten liggen in de snijpunten der lijn met de vier coördinaatruimten, de oneindig verre ruimte en in de raakpunten der lijn met de kwadratische ruimten van het confocale stelsel. Wij zullen vinden, dat een lijn door drie kwadratische ruimten uit het stelsel aangeraakt wordt, zoodat er 8 vertakkingspunten zijn. Nu is dus eveneens volgens de formule van RIEMANN $p = 3$.

Volgens STAUDE (*Math. Ann.* 20) noemen wij

$$K^2 = (k_0 - k)(l_0 - k)(m_0 - k)(A - k)(B - k)(C - k)(D - k),$$

$$L^2 = (k_0 - l)(l_0 - l)(m_0 - l)(A - l)(B - l)(C - l)(D - l),$$

$$M^2 = (k_0 - m)(l_0 - m)(m_0 - m)(A - m)(B - m)(C - m)(D - m),$$

$$N^2 = (k_0 - n)(l_0 - n)(m_0 - n)(A - n)(B - n)(C - n)(D - n),$$

waarbij k_0, l_0, m_0 de drie kwadratische ruimten zijn, welke de lijn aanraakt, dan zijn de integralen van de eerste soort in

haren eenvoudigsten vorm:

$$\int dk_1 = \pm\int\frac{dk}{K}, \quad \int dk_2 = \pm\int\frac{kdk}{K}, \quad \int dk_3 = \pm\int\frac{k^2dk}{K},$$

waardoor de differentiaalvergelijkingen van de lijn nu den vorm aannemen:

$$\pm\frac{dk}{K} \pm \frac{dl}{L} \pm \frac{dm}{M} \pm \frac{dn}{N} = 0,$$

$$\pm\frac{kdk}{K} \pm \frac{ldl}{L} \pm \frac{mdm}{M} \pm \frac{ndn}{N} = 0,$$

$$\pm\frac{k^2dk}{K} \pm \frac{l^2dl}{L} \pm \frac{m^2dm}{M} \pm \frac{n^2dn}{N} = 0;$$

hierbij moet N met het positieve of negatieve teeken aangenomen worden zóó, dat $\frac{dn}{N}$ langs de geheele lijn positief blijft. En de voorgaande vergelijkingen geven acht verschillende lijnen. Wij leiden daaruit een aequivalent stelsel voor de elementen der raaklijn af.

$$\pm(k-l)(k-m)\frac{dk}{K} + (n-l)(n-m)\frac{dn}{N} = 0,$$

$$\pm(l-k)(l-m)\frac{dl}{L} + (n-k)(n-m)\frac{dn}{N} = 0,$$

$$\pm(m-k)(m-l)\frac{dm}{M} + (n-k)(n-l)\frac{dn}{N} = 0.$$

Wij vinden nu het algemeene lijnelement en daaruit het lijnelement der gemeenschappelijke raaklijnen aan de kwadratische ruimten k_0, l_0, m_0 (Sommer, *Math. Ann.* 53)

$$ds = \pm\frac{dk}{2K_1} \pm \frac{dl}{2L_1} \pm \frac{dm}{2M_1} + \frac{dn}{2N_1},$$

waarbij

$$K_1 = \frac{K}{(k_0-k)(l_0-k)(m_0-k)}, \quad L_1 = \frac{L}{(k_0-l)(l_0-l)(m_0-l)},$$

$$M_1 = \frac{M}{(k_0-m)(l_0-m)(m_0-m)}, \quad N_1 = \frac{N}{(k_0-n)(l_0-n)(m_0-n)}.$$

Nu beschouwen wij een punt $(a, b, c, d) = (k, l, m, n)$, waaruit de 8 raaklijnen aan de kwadratische ruimten k_0, l_0, m_0 gebracht zijn, waarvan de elementen dk, dl, dm, dn zijn. In het punt nemen wij het nieuwe assenstelsel ξ, η, ζ, ϑ, dan is het resultaat, dat voor de raaklijnen van een punt aan drie kwadratische ruimten k_0, l_0, m_0 dezelfde stelling geldt als voor de focaalstralen, wat wij als volgt kunnen uitspreken.

VII. *De complex van raaklijnen aan drie kwadratische ruimten k_0, l_0, m_0 gaat door spiegelen tegen een willekeurige kwadratische ruimte van het confocale stelsel in zichzelf over.*

De differentiaalvergelijkingen van de focaallijn zijn

$$\pm \frac{dk}{(B-k)(C-k)(D-k)\sqrt{(A-k)}} \pm \frac{dl}{(l-D)(C-l)(B-l)\sqrt{(A-l)}}$$

$$\pm \frac{dm}{(m-D)(m-C)(B-m)\sqrt{(A-m)}} + \frac{dn}{(n-D)(n-C)(n-B)\sqrt{(A-n)}} = 0.$$

Neemt men $k_0 = D$, $l_0 = C$, $m_0 = B$, dan vindt men voor het element der focaallijn:

$$ds = \pm \frac{dk}{2\sqrt{(A-k)}} \pm \frac{dl}{2\sqrt{(A-l)}} \pm \frac{dm}{2\sqrt{(A-m)}} \pm \frac{dn}{2\sqrt{(A-n)}}.$$

§ 11. Het element van de focaallijn en de verandering van zijn karakteristiek langs een focaallijn.

De karakteristiek van een focaallijn in het punt P is ten gevolge van hare bepaling tegelijk die van het lijnelement van uitgang, dat met de focaallijn hetzelfde beginpunt en gelijke richtingscosinussen heeft. De richtingscosinussen van zulk een element ten opzichte van de assen ξ, η, ζ, ϑ kunnen aan den eenen kant volgens V, § 10, aan den anderen kant volgens II, § 6, bepaald worden, waardoor wij verkrijgen:

I. *Tusschen de hyperelliptische coördinaten k, l, m, n, dk, dl, dm, dn en de absolute lengte do van het element van een focaallijn met de karakteristiek $(o_1 o_2 o_3 o_4)$ voor de positieve helft, als o_1, o_2, o_3, o_4 de waarden + of — voorstellen, bestaan de vergelijkingen:*

$$\frac{h_1 dk}{do} = o_1 \sqrt{\frac{(k-B)(k-C)(k-D)}{(k-l)(k-m)(k-n)}}, \text{ enz.}$$

Na eenige herleiding verkrijgt men een resultaat, hetwelk sluit met het resultaat in § 10 door $k_0 = D$, $l_0 = C$, $m_0 = B$ te nemen:

II. *De volstrekte lengte do van het element van een focaallijn met de hyperelliptische coördinaten k, l, m, n, dk, dl, dm, dn en de karakteristiek* $(o_1 o_2 o_3 o_4)$ *heeft de waarde*

$$do = \frac{o_1 dk}{2\sqrt{(A-k)}} + \frac{o_2 dl}{2\sqrt{(A-l)}} + \frac{o_3 dm}{2\sqrt{(A-m)}} + \frac{o_4 dn}{2\sqrt{(A-n)}}.$$

Indien A, B, C, D, E de snijpunten van een willekeurige focaallijn met de ruimten $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $w = 0$, $p = 0$ zijn, verkrijgt men 12 verschillende soorten al naar gelang de punten A, B, C, D, E gelegen zijn. Zoo geven wij:

E	++++	A	+++−	B	++−+	C	+−++	D	−+++	E
	⟶		⟶		⟶		⟶		⟶	
o	——	o	——	o	——	o	——	o	——	o
	⟵		⟵		⟵		⟵		⟵	
	−−−−		−−−+		−−+−		−+−−		+−−−	

Wordt nu de focaallijn in een bepaalde richting doorloopen, dan veranderen in de karakteristiek $(o_1 o_2 o_3 o_4)$ van het evenzoo gerichte element in D de teekens van o_1 en o_2, in C de teekens van o_2 en o_3, in B de teekens van o_3 en o_4, in A het teeken van o_4, terwijl in D o_1 en o_2, in C o_2 en o_3, in B o_3 en o_4 onbepaald worden en in A o_4 echter tweewaardig ($\pm$) is.

Bij het samenvallen der punten A en C of A en D of A en E of B en D of B en E of C en E scheidt zich het bedoelde stuk uit het schema af. De punten A en B, B en C, C en D, D en E kunnen nooit samenvallen.

§ 12. De kegelruimte, welke een gegeven R^2 omhult.

Wij zullen nu de vergelijking der raakkegelruimte van een punt x', y', z', w' aangeven. Eerst geven wij nog eenige stellingen, welke men gemakkelijk vindt met behulp van de bijgevoegde artikelen van Salmon (*Geometry of three Dimensions*):

I. *Als met het punt x', y', z', w' als middelpunt vier confocale R^2's beschreven worden, welke de vier raakruimten aan de vier R^2's van het oorspronkelijk confocale stelsel tot coördinaatruimten hebben en elkaar in den oorsprong van het oorspronkelijk confocale stelsel R^2's snijden, dan zijn de halve assen*

van het nieuwe stelsel $\sqrt{A_1}$, $\sqrt{A_2}$, $\sqrt{A_3}$, $\sqrt{A_4}$; $\sqrt{B_1}$, $\sqrt{B_2}$, $\sqrt{B_3}$, $\sqrt{B_4}$; $\sqrt{C_1}$, $\sqrt{C_2}$, $\sqrt{C_3}$, $\sqrt{C_4}$; $\sqrt{D_1}$, $\sqrt{D_2}$, $\sqrt{D_3}$, $\sqrt{D_4}$. *De vier raakruimten in den oorsprong aan de vier* R^2*'s van het nieuwe confocale stelsel zijn de vier hoofdruimten van het oorspronkelijk stelsel* (art. 159).

II. *Als d de middellijn van een* R^2 *is, welke evenwijdig is aan de raaklijn aan de snijkromme met twee confocale* R^2*'s en p de loodlijn op de raakruimte in dat punt is, dan is het produkt pd voor ieder punt der snijkromme constant gelijk*

$$\sqrt{\frac{A_1B_1C_1D_1}{(A_1-A_2)(A_1-A_3)}}.$$

III. *De meetkundige plaats van de pool van een gegeven ruimte met betrekking tot een confocaal stelsel* R^2*'s is een rechte lijn, welke rechthoekig op die ruimte staat* (art. 167).

IV. *De meetkundige plaats van de pool van een raakruimte van een* R^2 *met betrekking tot eenig confocale* R^2 *is de normaal op de eerste* R^2 (art. 167).

V. *De afstand van het raakpunt van een raakruimte aan de* R^2 *met de halve assen* $\sqrt{A}$, $\sqrt{B}$, $\sqrt{C}$, $\sqrt{D}$, *en haar pool met betrekking tot eenig confocale* R^2 *met de halve assen* $\sqrt{A'}$, $\sqrt{B'}$, $\sqrt{C'}$, $\sqrt{D'}$ *is gelijk aan* $\frac{A'-A}{p'}$, *als p' de loodlijn uit het middelpunt op de raakruimte is* (art. 168).

VI. *De assen van een raakkegelruimte aan een* R^2 *zijn de normalen op de vier confocale* R^2*'s, welke door den top der kegelruimte kunnen gebracht worden* (art. 169).

Nu vindt men met behulp van art 170, 171 van SALMON als vergelijking voor de raakkegelruimte:

$$\left(\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}+\frac{w^2}{D}\right)\left(\frac{x'^2}{A}+\frac{y'^2}{B}+\frac{z'^2}{C}+\frac{w'^2}{D}-1\right)=$$

$$=\left(\frac{xx'}{A}+\frac{yy'}{B}+\frac{zz'}{C}+\frac{ww'}{D}\right)^2.$$

En aan de hand van art. 172, 173 van SALMON volgt:

$$\frac{x^2}{A'-A}+\frac{y^2}{A''-A}+\frac{z^2}{A'''-A}+\frac{w^2}{A^{IV}-A}=0,$$

als vergelijking voor de raakkegelruimte.

Als bizondere gevallen komen er (zie art. 174, SALMON)

$$\frac{x^2}{D'} + \frac{y^2}{D''} + \frac{z^2}{D'''} + \frac{w^2}{D^{IV}} = 0, \text{ enz.}$$

als vergelijkingen voor de focaalkegelruimten.

§ 13. De stelling van MONGE, MAC-CULLAGH en CHASLES, overeenkomstige punten en andere eigenschappen.

Met behulp van art. 180 van SALMON vindt men:

I. *De meetkundige plaats van het snijpunt van vier onderling rechthoekige ruimten, waarvan ieder een van vier confocale kwadratische ruimten aanraakt is een hyperspheer met den straal* $S^2 = A' + B' + C' + D' + (A'' - A') + (A''' - A') + A^{IV} - A')$.

Deze stelling kan die van MONGE heeten.

II. *Het verschil van de kwadraten van de loodlijnen op twee evenwijdige raakruimten aan twee confocale kwadratische ruimten van dezelfde soort is gelijk* $A_1 - A'$, *als* A_1 *en* A' *de kwadraten der halve primaire assen der kwadratische ruimten zijn.*

Aan de hand van art. 181 van SALMON heeft men:

III. *Drie confocale kwadratische ruimten kunnen aangebracht worden, welke een gegeven lijn raken, terwijl zij elkaar twee aan twee rechthoekig snijden.*

of

Drie confocale kwadratische ruimten van uit een punt gezien, schijnen elkaar overal onder rechte hoeken te snijden.

IV. *De lengte van het stuk, dat op elk der acht gemeenschappelijke snijlijnen van drie confocale kegelruimten met denzelfden top afgesneden wordt door een ruimte, welke evenwijdig aan de raakruimte aan een der vier confocale kwadratische ruimten door den top is en door het middelpunt gaat, is gelijk aan de loodlijn uit het middelpunt op de raakruimte in een der snijpunten van de drie confocale kwadratische ruimten, waaraan de kegelruimten raken, met de uitgekozene der vier confocale kwadratische ruimten door den top van de uitgekozene. Als* A', B', C', D' *de kwadraten der halve assen van de uitgekozene kwadratische ruimte door den top en* A_1, A_2, A_3 *de kwadraten der halve assen van de drie confocale kwadratische ruimten*

zijn, waaraan de kegelruimten raken, dan is het bedoelde stuk

$$v^2 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = \frac{A'.B'.C'.D'}{(A'-A_1)(A'-A_2)(A'-A_3)}.$$

In het bizonder geval, waar de drie beschouwde kegelruimten de focaalkegelruimten zijn, hebben wij $A_1 = A' - D'$, $A_2 = A' - C'$, $A_3 = A' - B'$; dus de lengte van het bedoelde stuk $v^2 = A'$.

In woorden verkrijgen wij voor elke focaallijn:

V. *Als men door eenig punt op een hyperelliptische ruimte een koorde trekt, welke de drie brandpuntenoppervlakken ontmoet, dan is het stuk, dat gemeten van dat punt tot het punt, waarin een ruimte door het middelpunt evenwijdig aan de raakruimte in dat eerste punt aan de hyperelliptische ruimte de koorde snijdt, gelijk aan den wortel uit de halve grootste as van de hyperelliptische ruimte.* (MAC-CULLAGH)

Met behulp van art. 182 van SALMON verkrijgt men:

VI. *Als van een kwadratische ruimte een stel van vier toegevoegde middellijnen gegeven is. kan men de assen in richting en grootte vinden.*

En aan de hand van art. 183 van SALMON komt er:

VII. *De lengte van de koorde van een kwadratische ruimte is gelijk* $2R^2\sqrt{\frac{(A'-A_1)(A'-A_2)(A'-A_3)}{A'.B'.C'.D'}}$ *en gelijk* $\frac{2R^2}{\sqrt{A'}}$, *als zij focaallijn is.*

En art. 184 van SALMON geeft ons:

VIII. *De meetkundige plaats van de toppen van kegelruimten met een as van wenteling, welke een gegeven kwadratische ruimte kunnen omhullen, is een van de brandpuntenoppervlakken.*

IX. De *lengte p der loodlijn uit het middelpunt van een kwadratische ruimte op een poolruimte van een punt met betrekking tot de* R^2 *is bepaald door*

$$\frac{1}{p^2} = \frac{(A'-A)(A''-A)(A'''-A)(A^{IV}-A)}{ABCD}\Big(-\frac{1}{A}-\frac{1}{B}-\frac{1}{C}-\frac{1}{D}+$$

$$+\frac{1}{A'-A}+\frac{1}{A''-A}+\frac{1}{A'''-A}+\frac{1}{A^{IV}-A}\Big),$$

als A', A'', A''', A^{IV} *de kwadraten der halve primaire assen zijn.*

X. *De weerkeerige kwadratische ruimte met betrekking tot het middelpunt* $x'=y'=z'=w'=0$ *is* $Ax^2+By^2+Cz^2+Dw^2=k^4$ *beschouwd ten opzichte van de hypersphеer* $x^2+y^2+z^2+w^2=k^2$.

Overeenkomstige punten (art. 187, SALMON) van twee hyperelliptische ruimten zijn bepaald door

$$\frac{x}{\sqrt{a_1}}=\frac{X}{\sqrt{A_1}},\ \frac{y}{\sqrt{b_1}}=\frac{Y}{\sqrt{B_1}},\ \frac{z}{\sqrt{c_1}}=\frac{Z}{\sqrt{C_1}},\ \frac{w}{\sqrt{d_1}}=\frac{W}{\sqrt{D_1}}.$$

Hierbij wordt een stelsel van hyperelliptische ruimten door de snijkromme van drie R^3's van ieder der drie andere soorten in overeenkomstige punten gesneden.

Gemakkelijk volgt ook (art. 190, SALMON):

XIV. *De afstand tusschen twee punten, welke ieder op twee confocale hyperelliptische ruimten liggen, is gelijk aan den afstand van de overeenkomstige punten.*

Verder is duidelijk (art. 193, SALMON):

XV. *Als verschillende evenwijdige raakruimten aan een reeks confocale kwadratische ruimten raken, terwijl zij bepaald zijn door de hoeken, welke de gemeenschappelijke loodlijn met de coördinaatassen maakt en welke hoeken* α, β, γ, δ *mogen heeten, dan is de meetkundige plaats van de aanrakingspunten zoodanig, dat de projecties van den driehoek op de zes coördinaatvlakken, waarbij de driehoek de vector van het raakpunt en de loodlijn tot zijden heeft, constant zijn. Tweemaal deze projecties zijn namelijk* $(a_1-b_1)\cos\alpha\cos\beta$, $(a_1-c_1)\cos\alpha\cos\gamma$, $(a_1-d_1)\cos\alpha\cos\delta$, $(b_1-c_1)\cos\beta\cos\gamma$, $(b_1-d_1)\cos\beta\cos\delta$, $(c_1-d_1)\cos\gamma\cos\delta$, *terwijl tweemaal het oppervlak van den driehoek* $r_1 p_1 \sin\phi$ *is, als* ϕ *de hoek tusschen den voerstraal en de loodlijn aangeeft. En de zes richtingscosinussen van het vlak van den driehoek met de zes coördinaatvlakken zijn:*

$$\frac{(a_1-b_1)\cos\alpha\cos\beta}{r_1 p_1 \sin\phi},\ \frac{(a_1-c_1)\cos\alpha\cos\gamma}{r_1 p_1 \sin\phi},\ \frac{(a_1-d_1)\cos\alpha\cos\delta}{r_1 p_1 \sin\phi},$$

$$\frac{(b_1-c_1)\cos\beta\cos\gamma}{r_1 p_1 \sin\phi},\ \frac{(b_1-d_1)\cos\beta\cos\delta}{r_1 p_1 \sin\phi},\ \frac{(c_1-d_1)\cos\gamma\cos\delta}{r_1 p_1 \sin\phi}.$$

Wegens het constant zijn van deze projecties is zoowel de richtin gals de grootte van den driehoek constant, zoodat de meetkundige plaats een gelijkzijdige hyperbool is; waarvan de loodlijn de eene asymptoot is.

§ 14. Kromming van de kwadratische ruimten.

Gemakkelijk komt men tot (art. 193*a*, Salmon):

I. *De confocale kwadratische ruimten snijden elkaar volgens de kromtelijnen.*

En zoo vindt men (art. 194, Salmon):

II. *De kromtestraal van een willekeurige richting in de raakruimte is gelijk* $\frac{\beta^2}{p}$, *als* β *de halve middellijn evenwijdig aan die richting en* p *de loodlijn uit het middelpunt op de raakruimte is.*

III. *De kromtestraal van een vlakke scheeve doorsnee is gelijk aan die van de vlakke normale doorsnee vermenigvuldigd met den cosinus van den hoek, dien de twee vlakken maken, terwijl zij door dezelfde lijn van de raakruimte gaan.*

Als een ruimte een normale ruimte volgens een vlak der raakruimte snijdt, dan zijn de twee kromtestralen van de vlakke hoofddoorsneden, welke in de eerste ruimte liggen, gelijk aan de twee kromtestralen van de overeenkomstige vlakke hoofddoorsneden, vermenigvuldigd met den cosinus van den hoek, welken de twee ruimten insluiten.

Als twee ruimten de normaal en een raaklijn in de raakruimte gemeen hebben, bezitten zij een gemeenschappelijken kromtestraal, namelijk dien, welke ligt in het gemeenschappelijk vlak.

IV. *De meetkundige plaats van de kromtemiddelpunten der kwadratische ruimte is een gebogen ruimte met drie bladen, van den zestienden graad en van de vierde klasse.*

De weerkeerige ruimte van de gebogen ruimte van middelpunten is van den vierden graad en heeft tot vergelijking

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \vartheta^2) =$$

$$= \left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} + \frac{\vartheta^2}{d^2}\right) (a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 + d^2\vartheta^2) ,$$

waar ξ, η, ζ, ϑ *de coördinaten van het loopende punt van de weerkeerige gebogen ruimte is.*

De vergelijking, die de drie kromtestralen door een punt geeft en de vergelijkingen der gebogen ruimten, waarvoor de

som der kromtestralen gelijk nul is of de totale kromming nul is, vragen hier te groote plaats.

V. *Als twee* R^2*'s in een punt van hare doorsnee eene gemeenschappelijke raakruimte hebben en tevens nog een gemeenschappelijke raakruimte in een opvolgend punt, dan hebben de twee kwadratische ruimten stationair contact.*

Wij geven verder het resultaat:

VI. *In ieder punt zijn drie richtingen, welke onderling loodrecht zijn, zoodanig dat de normaal in een opvolgend punt op ieder dezer drie richtingen genomen de oorspronkelijke normaal snijdt. En deze richtingen zijn die der hoofdrichtingen. Als wij ter wille van den eenvoud de richtingen van de hoofdsneden als coördinaatassen nemen, waarbij slechts de kwadraten* x, y, z, w *blijven bestaan, dan wordt de vergelijking van een opvolgend normaal*

$$\frac{x - x'}{ax'} = \frac{y - y'}{by'} = \frac{z - z'}{cz'} = 2w,$$

waaruit duidelijk blijkt, dat de normalen, welke met de punten $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ *overeenkomen, de* w*-as snijden op afstanden, welke achtereenvolgens bepaald worden door de vergelijkingen*

$$2aw = 1\ ,\quad 2bw = 1\ ,\quad 2cw = 1.$$

De stukken, welke op een normaal door de drie opeenvolgende normalen, welke de eerste snijden, afgesneden worden, zijn gelijk aan de hoofdkromtestralen.

Analytisch volgt ook:

VII. *Als wij vier kwadratische ruimten hebben, welke elkaar loodrecht snijden en als ieder paar elkaar ook onderling loodrecht snijdt in het opvolgend gemeenschappelijk punt, dan zijn de richtingen van de doorsnijdingen de richtingen van de kromtelijnen op ieder der kwadratische ruimten.*

Tevens bewijst men analytisch gemakkelijk, omdat aan twaalf vergelijkingen moet worden voldaan:

VIII. *Als er vier stelsels van kwadratische ruimten zijn, zoodanig, dat ieder kwadratische ruimte rechthoekig gesneden wordt door al de kwadratische ruimten van de andere drie stelsels, dan is de doorsnijding van telkens drie kwadratische ruimten uit verschillende stelsels, een kromtelijn op ieder der drie.*

Gemakkelijk is het volgende in te zien:

IX. *De keerkromme van de ontwikkelbare ruimte der normalen behoorende bij de punten van een der drie kromtelijnen, welke door een punt der kwadratische ruimte gaan, is de meetkundige plaats van kromtemiddelpunten, welke bij de punten van de beschouwde kromtelijn behooren.*

Evenzoo geven wij het volgende resultaat:

X. *De ruimten van drie opvolgende normalen van een kromtelijn raken aan de twee bladen van de gebogen ruimte van middelpunten, welke bij de andere twee kromtelijnen behooren. De raakruimten in de drie kromtemiddelpunten, welke bij een bepaald punt der kwadratische ruimte behooren, snijden elkaar rechthoekig en raken tevens de drie andere confocale kwadratische ruimten aan, welke door het punt gaan of de raakruimten in een punt aan de drie andere confocale kwadratische ruimten door dat punt raken de gebogen ruimte van middelpunten, welke bij de oorspronkelijke kwadratische ruimte behoort, telkens in een der kromtemiddelpunten aan.*

Als wij een geodetische lijn bepalen als een lijn, waarvan de osculeerende ruimte steeds door de normaal van de kwadratische ruimte gaat, kunnen wij beweren, dat de keerkrommen geodetische lijnen voor de gebogen ruimte van middelpunten zijn, telkens voor het blad, waarop zij ligt. Want wij zagen, dat de ruimte van drie opvolgende normalen (d. w. z. de ruimte van drie opvolgende raaklijnen aan de keerkromme) raakruimte aan de andere twee bladen van de gebogen ruimte van middelpunten is en loodrecht op de raakruimte in dat punt aan dat blad van de gebogen ruimte van middelpunten is, waarop het beschouwde punt ligt. En omdat nu de osculeerende ruimte van de keerkromme steeds loodrecht is op de gebogen ruimte van middelpunten, is de keerkromme een geodetische lijn op de gebogen ruimte van middelpunten.

Gemakkelijk leidt men af:

XI. *Door ieder punt van een kwadratische ruimte gaan drie kromtelijnen, waarvan*

$$[1 + p_1^2 - (w_1 - w)q_1]dx + [p_1p_2 - (w_1 - w)q_2]dy + \\ + [p_1p_3 - (w_1 - w)q_3]dz = 0\,,$$

$$[p_1p_2 - (w_1 - w)q_2]dx + [1 + p_2^2 - (w_1 - w)q_4]dy + \\ + [p_2p_3 - (w_1 - w)q_5]dz = 0\,,$$

$$[p_1p_3 - (w_1 - w)q_3]dx + [p_2p_3 - (w_1 - w)q_5]dy +$$
$$+ [1 + p_3^2 - (w_1 - w)q_6]dz = 0.$$

de differentiaalvergelijkingen van de projecties op de xyz-ruimte zijn, terwijl bij ieder punt drie kromtestralen behooren, welke door den volgenden determinant bepaald worden:

$$0 = \begin{vmatrix} (1+p_1^2)\sqrt{(1+p_1^2+p_2^2+p_3^2)}-Rq_1, & p_1p_2\sqrt{(1+p_1^2+p_2^2+p_3^2)}-Rq_2, & p_1p_3\sqrt{(1+p_1^2+p_2^2+p_3^2)}-Rq_3 \\ p_1p_2\sqrt{(1+p_1^2+p_2^2+p_3^2)}-Rq_2, & (1+p_2^2)\sqrt{(1+p_1^2+p_2^2+p_3^2)}-Rq_4, & p_2p_3\sqrt{(1+p_1^2+p_2^2+p_3^2)}-Rq_5 \\ p_1p_3\sqrt{(1+p_1^2+p_2^2+p_3^2)}-Rq_3, & p_2p_3\sqrt{(1+p_1^2+p_2^2+p_3^2)}-Rq_5, & (1+p_3^2)\sqrt{(1+p_1^2+p_2^2+p_3^2)}-Rq_6 \end{vmatrix}$$

Ook leidt men zonder moeite af (art. 312, SALMON):

XII. *Als een kromtelijn een ruimtekromme is, dan maakt haar ruimte een constanten hoek met de raakruimte in ieder der punten, waar de ruimte van de kromtelijn de kwadratische ruimte snijdt.*

Ook volgt:

XIII. *Van den determinant der cosinussen van vier onderling loodrechte richtingen is ieder term gelijk aan den determinant, welke bestaat uit termen, welke niet met den eersten term in dezelfde kolom of rij voorkomen, d. i.*

$$\frac{\alpha_4}{\begin{vmatrix}\beta_1, & \gamma_1, & \delta_1\\ \beta_2, & \gamma_2, & \delta_2\\ \beta_3, & \gamma_3, & \delta_3\end{vmatrix}} = \frac{\beta_4}{\begin{vmatrix}\gamma_1, & \delta_1, & \alpha_1\\ \gamma_2, & \delta_2, & \alpha_2\\ \gamma_3, & \delta_3, & \alpha_3\end{vmatrix}} = \frac{\gamma_4}{\begin{vmatrix}\delta_1, & \alpha_1, & \beta_1\\ \delta_2, & \alpha_2, & \beta_2\\ \delta_3, & \alpha_3, & \beta_3\end{vmatrix}} = \frac{\delta_4}{\begin{vmatrix}\alpha_1, & \beta_1, & \gamma_1\\ \alpha_2, & \beta_2, & \gamma_2\\ \alpha_3, & \beta_3, & \gamma_3\end{vmatrix}} =$$
$$= \ldots . \text{ (ten getale van 16)} = \pm 1.$$

Tevens is ieder viertermige determinant gelijk aan een tweeden viertermigen determinant, waarbij de termen van den tweeden determinant niet met de termen van den eersten determinant in dezelfde kolom of rij voorkomen, n.l.

$$\frac{\begin{vmatrix}\alpha_1, & \alpha_2\\ \beta_1, & \beta_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\gamma_3, & \gamma_4\\ \delta_3, & \delta_4\end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix}\alpha_1, & \alpha_3\\ \beta_1, & \beta_3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\gamma_2, & \gamma_4\\ \delta_2, & \delta_4\end{vmatrix}} = \ldots . \text{ (ten getale van 18)} = 1,$$

hetwelk meetkundig beteekent, dat het vlak door twee der vier onderling rechthoekige richtingen loodrecht is op het vlak van de twee andere richtingen.

Iets langer is het bewijs voor:

XIV. *Als men een stel orthogonale kwadratische ruimten heeft, terwijl men een bepaalde kwadratische ruimte uitkiest, dan heeft men niet alleen op de gegeven kwadratische ruimte, maar ook op de volgende kwadratische ruimte van dezelfde soort als de oorspronkelijke, drie reeksen van krommen, welke elkaar onderling loodrecht snijden, wat het orthogonale stelsel kwadratische ruimten kenmerkt. En nu zijn de drie reeksen krommen op de gegeven kwadratische ruimte, d. i. op ieder willekeurige kwadratische ruimte kromtelijnen, waarmee aangetoond is, dat een orthogonaal stelsel kwadratische ruimten elkaar volgens de kromtelijnen snijdt. En daar hetzelfde natuurlijk op ieder kwadratische ruimte van de andere drie soorten kwadratische ruimten het geval is, is de stelling van* Dupin *aangetoond.*

§ 15. Geodetische lijnen.

Er zijn op een kwadratische ruimte k_0 geodetische lijnen, waarvan de raaklijnen twee confocale kwadratische ruimten l_0 en m_0 aanraken. Van ieder punt op k_0 gaan vier dergelijke geodetische lijnen uit. De differentiaalvergelijkingen verkrijgt men door $k = k_0$ te stellen, d. w. z.

$$\pm (l - k_0)\frac{dl}{L} \pm (m - k_0)\frac{dm}{M} + (n - k_0)\frac{dn}{N} = 0,$$

$$\pm l(l - k_0)\frac{dl}{L} \pm m(m - k_0)\frac{dm}{M} + n(n - k_0)\frac{dn}{N} = 0.$$

Het lijnelement van zoo'n geodetische lijn wordt (zie § 11)

$$ds = \pm\frac{dl}{2L} \pm \frac{dm}{2M} + \frac{dn}{2N}.$$

Terwijl deze geodetische lijnen op k_0 de doorsnee van k_0 en l_0 aanraken, gaan zij op de doorsnee van k_0 en l_0 verder als geodetische lijnen, waarvan de raaklijnen behalve genoemde doorsnee nog de kwadratische ruimte m_0 aanraken. Van ieder willekeurig punt dezer doorsnee gaan twee geodetische lijnen

uit, welke de kromtelijn (k_0, l_0, m_0) aanraken. De elementen van deze geodetische lijnen zijn weer evenzoo bepaald als de elementen van een raaklijn aan de drie confocale kwadratische ruimten, daarom kunnen wij de vergelijking van de geodetische lijnen op genoemde doorsnee uit de vergelijkingen (zie bladz. 18) afleiden door $dk = 0$, $dl = 0$ te nemen, zoodat

$$\pm (m - k_0)(m - l_0) \frac{dm}{M} \pm (n - k_0)(n - l_0) \frac{dn}{N} = 0$$

de differentiaalvergelijking der geodetische lijnen op de doorsnee van k_0, l_0 is en

$$ds = \pm \frac{dm}{2M} + \frac{dn}{2N}$$

de uitdrukking voor het lijnelement is.

Stelling. *De vier geodetische lijnen, welke van een punt op k_0 uitgaan, kunnen op drie manieren in paren gerangschikt worden, waarvan de raaklijnen door de raaklijnen van de kromtestralen op k_0 door dat punt middendoor gedeeld worden.*

§ 16. Draadconstructie van de kwadratische ruimte.

Laat een willekeurige hyperelliptische ruimte k en drie bepaalde kwadratische ruimten k_0, l_0, m_0 gegeven zijn. Uit ieder punt P van k kan men 8 raaklijnen aan k_0, l_0, m_0 trekken. Wij noemen twee raaklijnen, waarvan de hoek door de normaal van k middendoor gedeeld wordt, van dezelfde soort. De volgorde, waarin de raakpunten op een raaklijn in positieven zin over de raaklijn voorkomen, is verschillend voor het punt, dat men beschouwt.

Steeds kan men een draad spannen, die van P uitgaat en naar P terugkeert. Nemen wij twee raaklijnen van dezelfde soort in P, waarbij de volgorde der raakpunten voor beide raaklijnen dezelfde is.

Wij laten van P uit eerst een draad volgens de raaklijn verloopen tot het raakpunt met k_0, van waar de draad geodetisch op k_0 en eveneens op (k_0, l_0) verloopt tot het punt, waarin de draad de kromtelijn (k_0, l_0, m_0) aanraakt en met de kromtelijn voor een deel samenvalt, om weer op (k_0, l_0) en

dan op k_0 en van hier weer op (k_0, l_0) geodetisch verder te gaan, totdat zij aan den diametraal tegenover den eersten tak gelegen tak der kromtelijn komt, van waaruit zij weer op (k_0, l_0) en op k_0 verloopt om ten slotte naar P terug te keeren.

De volgorde der deelen kan anders zijn, maar de draad is steeds te trekken. En het lijnelement van alle voorkomende deelen van den draad is

$$ds = \pm \frac{dk}{2K} \pm \frac{dl}{2L} \pm \frac{dm}{2M} + \frac{dn}{2N}$$

en de veranderlijken bewegen zich tusschen de volgende grenzen:

1) k neemt toe van P tot de aanraking met k_0, blijft constant, zoolang de draad over k_0 verloopt en neemt dan weer van k_0 tot k af, als de draad van k_0 tot P terugkeert.

2) l neemt eerst de waarde l_0 aan in de raakpunten der raaklijn met l_0 en verder langs geheele stukken, die op l_0 liggen; tusschen deze waarden neemt l eveneens tweemaal de waarde D aan, zoodat l dus viermaal tusschen D en l_0 heen en weergaat.

3) Evenzoo gaat m viermaal tusschen C en m_0 heen en weer.

4) Daar de geheele draad zich in een zone tusschen de gescheiden takken van een kromtelijn slingert, kan men n op de kromtelijn volgen; n beweegt zich tusschen dezelfde grenzen en het is gemakkelijk in te zien, dat n zich op de kromtelijn tusschen B en A beweegt, terwijl deze de ruimten $y = 0$, $x = 0$ ieder tweemaal doordringt.

Daar men alle termen bij de integratie met de volstrekte waarde moet nemen, verkrijgt men voor de lengte van den draad

$$S = \pm \left| \int_k^{k_0} \frac{dk}{K} \right| \pm 2 \left| \int_D^{l_0} \frac{dl}{L} \right| \pm 2 \left| \int_C^{m_0} \frac{dm}{M} \right| + 2 \left| \int_B^{A} \frac{dn}{N} \right| .$$

In deze som staan bekende grootheden behalve de eene grens k; dus is hare waarde niet afhankelijk van het punt van uitgang; zij is voor alle punten van k dezelfde en onafhankelijk of men van twee andere der 8 raaklijnen uitgegaan was. In 't kort herhalende verkrijgen wij:

Stelling. *Spant men van een punt* P *op* k *een draad over drie confocale kwadratische ruimten* k_0 $(> k)$, l_0, m_0, *zoodat de*

draad de gemeenschappelijke raaklijnen en de geodetische lijnen op de kwadratische ruimten of op de doorsneden volgt, terwijl de afzonderlijke stukken vloeiend in elkaar overgaan en slechts in het punt P, waar twee rechtlijnige stukken samenkomen, een knikpunt is, dan is de lengte van den draad voor alle punten dezelfde.

Stellen wij $k_0 = D$, $l_0 = C$, $m_0 = B$, dan verkrijgen wij:

$$S = \pm \left| \int_k^D \frac{dk}{K} \right| \pm 2 \left| \int_D^C \frac{dl}{L} \right| \pm 2 \left| \int_C^B \frac{dm}{M} \right| + 2 \left| \int_B^A \frac{dn}{N} \right| .$$

In dit geval bestaat de draad uit rechte stukken, namelijk de rechte van het punt P naar een punt Q der brandpunten ellipsoide, van daar een rechte naar een punt R der focaalellips en van daar naar het brandpunt + D. Deze afstand heet de *gebroken brandpuntsafstand.*

P 1 c, Q 2

DE OPTISCHE AFBEELDING IN DE VIERDE AFMETING,

DOOR

M. J. VAN UVEN.
(Utrecht.)

Wanneer een stelsel van punten, lijnen en vlakken, te zamen in een ruimte van drie afmetingen gelegen, door een of ander optisch systeem homocentrisch wordt afgebeeld, bestaan er tusschen de afgebeelde figuren en haar beelden, zekere betrekkingen, die we in 't volgende langs meetkundigen weg wenschen af te leiden.

De beelden liggen samen ook in een ruimte van drie afmetingen.

De ruimte waarin de af te beelden figuren liggen, heet voorwerpruimte; de beelden liggen samen in de beeldruimte.

Bij een *physische* optische afbeelding vallen voorwerpruimte en beeldruimte samen.

Om de gezochte betrekkingen echter eenvoudiger af te leiden, zullen we wel aannemen, dat voorwerpruimte en beeldruimte in dezelfde ruimte van vier afmetingen liggen, maar *niet* samenvallen. De overeenkomst één aan één van punten, lijnen en vlakken kunnen we nu onderstellen te zijn ontstaan door perspectieve ligging, omdat bij een homocentrische afbeelding er altijd één vlak is, dat met zijn beeld samenvalt.

We denken ons nu het geheel van alle beelden als centrale projectie op de beeldruimte van de voorwerpen in de voorwerpruimte, terwijl het centrum van projectie zoowel buiten de voorwerpruimte als buiten de beeldruimte ligt.

Het stelsel S, gelegen in de ruimte R, wordt uit het punt C, gelegen buiten R, geprojecteerd op de ruimte R′ in 't stelsel S′.

S is nu collineair verwant met S′, want: Een vlak V van

S wordt uit C geprojecteerd door de ruimte (VC): deze snijdt R′ volgens een vlak V′.

Een lijn l van S wordt uit C geprojecteerd door 't vlak (lC); dit snijdt R′ volgens een lijn l'.

Een punt P van S wordt uit C geprojecteerd door de lijn PC; deze snijdt R′ in een punt P′. S′ ligt ook perspectief met S, evenals een vlakke figuur met haar centrale projectie op een tafereel.

Het vlak W_2^∞ in 't oneindige van S wordt uit C geprojecteerd door de ruimte (W_2^∞C), die nu evenwijdig is aan R.

(W_2^∞C) snijdt R′ volgens een, in 't algemeen in 't eindige gelegen vlak W_2'. Dit vlak W_2' zal nu 't tweede hoofdbrandvlak zijn.

Het vlak $W_1'^\infty$ in 't oneindige van S′ wordt uit C geprojecteerd door de ruimte ($W_1'^\infty$C), die evenwijdig is aan R′. ($W_1'^\infty$C) snijdt R volgens een, in 't algemeen in 't eindige gelegen vlak W_1.

Met W_1 van S komt dus $W_1'^\infty$ van S′ overeen. W_1 zal nu 't eerste hoofdbrandvlak zijn.

Alle normalen (n_1) op W_1 worden uit C geprojecteerd door een stelsel van vlakken in de ruimte van vier afmetingen, die alle gaan door de lijn, die C verbindt met het vergaarpunt Q_1^∞ van alle normalen (n_1). Dit vlakkenstelsel snijdt R′ volgens een stralenschoof (n_1'), waarvan het centrum Q_1' in W_2' ligt, omdat Q_1^∞ in W_2^∞ ligt. Onder alle elementen van de stralenschoof (n_1') zal er één (N′) zijn, die loodrecht staat op W_2'. Hiermee komt dan in S overeen één van de normalen op W_1; we zullen deze N noemen.

Er is dus altijd een lijn N, loodrecht op W_1 aan te wijzen, waarvan het beeld N′ loodrecht staat op W_2'.

We nemen nu in S een assenkruis XY_1Z_1 aan, waarvan we de Y_1- en de Z_1-as in W_1 leggen, terwijl we als X-as de lijn N nemen; de oorsprong van dit assenkruis zal dan zijn het snijpunt O_1 van N met W_1.

In S′ nemen we nu ook een rechthoekig assenkruis $X'Y_2'Z_2'$ aan, waarvan we de Y_2'- en Z_2'-as in W_2' leggen, terwijl we de X′-as laten samenvallen met de lijn N′; het snijpunt O_2' van N′ met W_2' zal nu de oorsprong van dit assenkruis zijn.

We hebben nu de X- en de X′-as zóó gekozen, dat ze met elkaar overeenkomen. Een punt op de X-as zal dus afgebeeld worden in een punt op de X′-as.

De Y_1- en Z_1-as zullen nooit met de Y_2'- en de Z_2'-as kunnen overeenkomen, aangezien ze *niet* in geconjugeerde vlakken liggen.

Met een vlak V door een lijn l in S komt overeen een vlak V' door 't beeld l' van l in S'. Immers 't vlak (lC) is een vlak van de ruimte (VC); deze snijdt R' volgens een vlak V'; het vlak (lC) van de ruimte (VC) snijdt R' in de lijn l', die dus moet liggen in 't aan V toegevoegde vlak V'.

Met een vlak V door de X-as in R komt dus overeen een vlak V' door de X'-as.

Alle loodrecht op elkaar staande vlakken door de X-as vormen een orthogonale vlakkeninvolutie.

Deze wordt uit C geprojecteerd door een ruimteninvolutie; deze laatste snijdt R' volgens een vlakkeninvolutie, waarvan de as samenvalt met x'-as. Deze vlakkeninvolutie heeft òf één, òf oneindig vele orthogonale paren.

1°. De vlakkeninvolutie door de x'-as heeft één orthogonaal paar.

Dit paar snijdt het vlak W'_2 volgens twee onderling loodrechte lijnen, gaande door O'_2, die we als Y'_2 — en Z'_2 — as zullen kiezen.

Met het vlakkenpaar ($X'O'_2Y'_2$, $X'O'_2Z'_2$) komt overeen een orthogonaal vlakkenpaar door X-as in R. Dit paar snijdt W_1 volgens twee onderling loodrechte lijnen door O_1. Deze maken we tot Y_1- en Z_1-as.

Noemen we nu het aan Y_1O_1X toegevoegde vlak: 't vlak $Y'_2O'_2X'$, dan moeten we het aan Z_1O_1X toegevoegde vlak 't $Z'_2O'_2X'$-vlak noemen.

2°. De vlakkeninvolutie door de X'-as heeft oneindig vele orthogonale paren.

Met elk orthogonaal vlakkenpaar door de X-as is nu een *orthogonaal* vlakkenpaar door de X'-as geconjugeerd.

De afbeelding is hier symmetrisch om de X'-as.

Elk punt P van de X-as komt overeen met één punt P' van de X'-as. Men heeft hier dus twee projectieve (hier zelfs perspectieve) puntenreeksen op de X-as en de X'-as als dragers.

Met O_1 op de X-as komt overeen O'^{∞}_1 op de X'-as.

Met O'_2 op de X'-as komt overeen O^{∞}_2 op de X-as.

O_1 en O'_2 zijn dus de tegenpunten van de reeksen.

Kiest men deze punten als beginpunten van telling, dan is $O_1P \times O'_2P' =$ constante $= k$.

Aangezien $O_1P = x$ en $O'_2P' = x'$ hebben we

$$xx' = k.$$

Met alle lijnen, die gaan door één punt Q van W_1 komen overeen alle lijnen, die gaan door één punt Q'^{∞} van W_1^{∞}, dus één bepaalde *lijnrichting.*

Evenzoo komt met één bepaalde lijnrichting in S een stralenschoof in S′ overeen, waarvan 't centrum in W'_2 ligt.

Met een lijn l evenwijdig aan de X-as komt nu overeen een lijn l' door O'_2; immers l snijdt de X-as in O_2^{∞}.

De punten van W_1 en W'_2 zijn *nevenbrandpunten.* O_1 en O'_2 heeten de *hoofdbrandpunten.*

We zullen nu 't bijzondere geval gaan behandelen, dat het aan R en R′ gemeenschappelijke vlak V loodrecht staat op de X-as.

Een vlak loodrecht op de X-as snijdt W_1 in 't oneindige, dus in de snijlijn van W_1 met W_2^{∞}. Het toegevoegde vlak zal dan moeten gaan door de snijlijn van $W'_1{}^{\infty}$ en W'_2, dus W'_2 in 't oneindige snijden, derhalve loodrecht staan op de X′-as.

Staat V dus loodrecht op de X-as, dan zal 't overeenkomstige vlak (maar dit is V zelf) loodrecht staan op de X′-as; m. a. w. V staat ook loodrecht op de X′-as.

De X′-as behoeft niet in 't verlengde van de X-as te vallen, aangezien men in de ruimte van vier afmetingen in één punt van een vlak oneindig vele normalen op dat vlak kan oprichten.

Natuurlijk zal 't vlak, gaande door de X- en de X′-as loodrecht staan op 't vlak V, n l. in dien zin, dat alle lijnen van 't vlak (XX′) loodrecht staan op alle lijnen van 't vlak V.

In V wordt nu door de orthogonale vlakkeninvolutie door de X-as een orthogonale straleninvolutie ingesneden.

Aangezien de X′-as loodrecht staat op V, zal de toegevoegde vlakkeninvolutie door de X′-as nu per se orthogonaal zijn.

Voor 't geval de X-as loodrecht staat op 't gemeenschappelijk vlak V, is de afbeelding zeker symmetrisch.

Doordat we van een perspectieve ligging zijn uitgegaan, kwam 't aan R en R′ gemeenschappelijke vlak V met zichzelf

overeen. Om nu dien stand te krijgen, zooals die in de natuurkunde voorkomt, moeten we R′ zoolang draaien om 't vlak V, totdat ze met R samenvalt.

In dit geval zal de X′as in 't verlengde van de X-as komen, wanneer de X-as loodrecht staat op V.

Voor 't geval R′ evenwijdig is met R, en V dus samengevallen is zoowel met $W'_1{}^{\infty}$ als met $W_2{}^{\infty}$, krijgen we de zg. *telescopische* afbeelding.

Met elke lijnrichting komt dan eveneens een lijnrichting overeen.

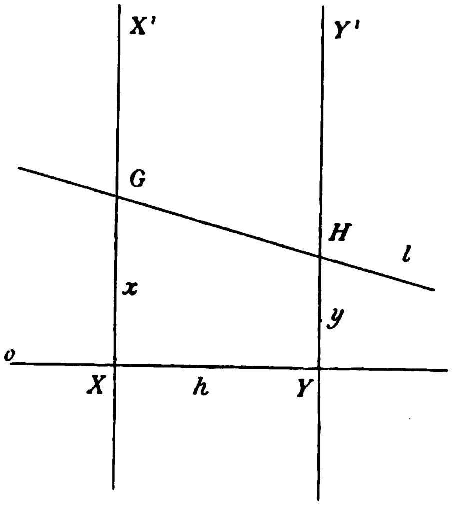
OVER EEN DOOR TWEE KEGELSNEDEN BEPAALDE OMHULLENDE WAARVAN DE ONTWONDENE EENER KEGELSNEDE EEN BIJZONDER GEVAL IS,

DOOR

M. J. VAN UVEN.
(Utrecht.)

§ 1. Korte omschrijving van 't hier gebezigde lijncoördinatenstelsel.
§ 2. De door twee *algemeene* kegelsneden bepaalde omhullende.
§ 3. De omhullende bepaald door een algemeene kegelsnede en een parabool, en door twee parabolen.
§ 4. De omhullende bepaald door twee samenvallende kegelsneden.

§ 1. In dit opstel zullen we gebruik maken van een bijzonder stelsel niet-homogene lijncoördinaten, welk stelsel we als volgt kunnen beschrijven:



Op een lijn o nemen we twee punten X en Y aan; in X en Y richten we op o de loodlijnen XX′ en YY′ op.

Een lijn l moge de lijn XX′ in G, en de lijn YY′ in H snijden.

Stellen we $XG = x$ en $YH = y$, dan zullen we onder de coördinaten van de lijn l verstaan de stukken x en y.

De coördinaat x wordt van X uit geteld in den zin XX'.
" " y " " Y " " " " " YY'.

Een punt heeft nu een vergelijking van den eersten graad in x en y.

Dit coördinatenstelsel is reeds elders beschreven. *)

In mijn aangehaalde studie is in 't bijzonder de aandacht gewijd aan de dualistische toevoeging, die men krijgt, door twee meetkundige figuren geconjugeerd te noemen, wanneer de eene in 't Cartesische coördinatenstelsel dezelfde coördinaten of dezelfde vergelijking heeft als de tweede in 't hier beschreven lijncoördinatenstelsel.

Op deze beschouwingen zullen we nu niet terugkomen. Het zal hier ons doel zijn langs analytischen weg een stelsel krommen te onderzoeken, waartoe de ontwondene eener kegelsnede behoort.

We kunnen dan met de volgende opmerkingen volstaan:

1°. Voor alle evenwijdige lijnen geldt, dat het verschil tusschen hun x-coördinaat en hun y-coördinaat constant is. Hieruit volgt, dat een punt in 't oneindige wordt voorgesteld door de vergelijking

$$x - y = k.$$

2°. Verplaatsen we een lijn evenwijdig aan zich zelf naar 't oneindige, dan zullen x en y beide oneindig worden, maar nog steeds een eindig bedrag verschillen; het quotient $\frac{x}{y}$ heeft dus in de limiet de waarde 1. De lijn in 't oneindige wordt derhalve voorgesteld door de coördinaten

$$x = \rho = \infty$$
$$y = \rho = \infty.$$

3°. Een lijn l_1 met coördinaten x_1 en y_1 maakt met de lijn o een hoek ϕ_1, waarvan de tangens is

$$\text{tg}\,\phi_1 = -\frac{x_1 - y_1}{h},$$

waarbij h is de afstand tusschen de punten X en Y.

---

*) Men vergelijke in de eerste plaats een opstel van M. d'Ocagne in de *Nouvelles Annales* van 1885, p. 110 en verder M. J. van Uven: „Su di un sistema particolare di coördinate tangenziali". (*Le matematiche pure ed applicate*, deel II; Juli–Aug. 1902).

Een lijn $l_2(x_2 y_2)$ zal met o een hoek ϕ_2 maken, wanneer:

$$\text{tg}\,\phi_2 = -\frac{x_2 - y_2}{h}.$$

De lijnen l_1 en l_2 zullen loodrecht op elkaar staan, wanneer

$$\text{tg}\,\phi_1\,\text{tg}\,\phi_2 = -\frac{x_1 - y_1}{h} \cdot -\frac{x_2 - y_2}{h} = -1$$

of

$$(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) = -h^2.$$

Dit is dus de voorwaarde voor den loodrechten stand van de lijnen $(x_1 y_1)$ en $(x_2 y_2)$.

4°. De algemeene kegelsnede is van de tweede klasse, en zal derhalve voorgesteld worden door een quadratische vergelijking in lijncoördinaten, dus bijv. door

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

De kegelsnede is een parabool, of m. a. w. de lijn in 't oneindige is raaklijn aan de kromme, wanneer de coördinaten $x = \rho = \infty$, $y = \rho = \infty$ aan haar vergelijking voldoen.

We hebben dan:

$$a_{11}\rho^2 + 2a_{12}\rho^2 + a_{22}\rho^2 + 2a_{13}\rho + 2a_{23}\rho + a_{33} = 0$$

of

$$a_{11} + 2a_{12} + a_{22} + 2\frac{a_{13} + a_{23}}{\rho} + \frac{a_{33}}{\rho^2} = 0$$

of, aangezien $\rho = \infty$ is,

$$a_{11} + 2a_{12} + a_{22} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Deze voorwaarde drukt dus uit, dat de kegelsnede een parabool is. Het eerste lid is een semi-invariant van den eersten graad, 't geen in overeenstemming is met het feit, dat in een schaar van kegelsneden één parabool voorkomt.

5°. De pool van de lijn $(x_1 y_1)$ t.o.v. de kegelsnede heeft tot vergelijking:

$$a_{11}x_1x + a_{12}(y_1x + x_1y) + a_{22}y_1y + a_{13}(x + x_1) + a_{23}(y + y_1) + a_{33} = 0.$$

Omdat nl. pool en poollijn dualistisch verwante begrippen zijn, zal de vergelijking van de pool eener rechte $x_1 y_1$ t. o. v. een kegelsnede denzelfden vorm hebben als die van de poollijn van een punt $x_1 y_1$ in Cartesische coördinaten.

De pool van de lijn in 't oneindige, d. w. z. het middelpunt, heeft tot vergelijking:

$$a_{11}\rho x + a_{12}(\rho x + \rho y) + a_{22}\rho y + a_{13}(x + \rho) + a_{23}(y + \rho) + a_{33} = 0$$

of

$$(a_{11} + a_{12})x + (a_{12} + a_{22})y + (a_{13} + a_{23}) + \frac{a_{13}x + a_{23}y + a_{33}}{\rho} = 0$$

of, aangezien $\rho = \infty$ is,

$$(a_{11} + a_{12})x + (a_{12} + a_{22})y + (a_{13} + a_{23}) = 0 \quad . \; . \; . \; (2).$$

§ 2. We gaan thans over tot de behandeling van ons eigenlijke onderwerp. We stellen, dat gegeven zijn:

1°. een kegelsnede (a), waarvan de vergelijking moge zijn:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \quad . \; . \; (3)$$

2°. een kegelsnede (b), die tot vergelijking moge hebben:

$$b_{11}x^2 + 2b_{12}xy + b_{22}y^2 + 2b_{13}x + 2b_{23}y + b_{33} = 0 \quad . \; . \; . \; (4)$$

3°. een raaklijn m_1 (met coördinaten x_1, y_1) aan (b).

De pool M_1 van m_1 t.o.v. (a) heeft nu tot vergelijking:

$$M_1 \equiv a_{11}x_1x + a_{12}(y_1x + x_1y) + a_{22}y_1y + a_{13}(x + x_1) + a_{23}(y + y_1) + a_{33} = 0.$$

We laten uit M_1 een loodlijn $m_2(x_2, y_2)$ neer op m_1. Omdat m_2 door M_1 gaat, hebben we:

$$a_{11}x_1x_2 + a_{12}(y_1x_2 + x_1y_2) + a_{22}y_1y_2 + a_{13}(x_2 + x_1) + a_{23}(y_2 + y_1) + a_{33} = 0 \ldots (5)$$

Omdat m_2 loodrecht staat op m_1, geldt de betrekking:

$$(x_1 - y_1)(x_2 - y_2) = -h^2 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (6)$$

Dat m_1 raaklijn is aan (b) wordt uitgedrukt door

$$b_{11}x_1^2 + 2b_{12}x_1y_1 + b_{22}y_1^2 + 2b_{13}x_1 + 2b_{23}y_1 + b_{33} = 0 \ldots (7)$$

Laten we nu m_1 de kegelsnede (b) omhullen, dan zal de lijn m_2 ook een zekere kromme ω omhullen.

De vergelijking van ω krijgen we, door uit (5), (6) en (7) x_1 en y_1 te elimineeren.

Eliminatie van y_1 uit (5) en (6) geeft

$$Ax_1(x_2 - y_2) + C = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (8)$$

waarbij

$$A \equiv (a_{11} + a_{12})x_2 + (a_{12} + a_{22})y_2 + (a_{13} + a_{23}),$$

en

$$C \equiv a_{13}x_2^2+(a_{23}-a_{13})x_2y_2-a_{23}y_2^2+(a_{12}h^2+a_{33})x_2+(a_{22}h^2-a_{33})y_2+a_{23}h^2.$$

Eliminatie van y_1 uit (6) en (7) geeft

$$\alpha \{x_1(x_2-y_2)\}^2+\beta\{x_1(x_2-y_2)\}+\gamma=0 \quad . . . (9)$$

waarbij

$$\alpha \equiv b_{11}+2b_{12}+b_{22}$$

$$\beta \equiv 2(b_{13}+b_{23})(x_2-y_2)+2(b_{12}+b_{22})h^2$$

$$\gamma \equiv b_{33}(x_2-y_2)^2+2b_{23}h^2(x_2-y_2)+b_{22}h^4.$$

Elimineeren we nu $x_1(x_2-y_2)$ uit (8) en (9), dan komt er:

$$\alpha C^2-\beta AC+\gamma A^2=0 \quad . . . . . (10)$$

Deze vergelijking is blijkbaar van den vierden graad in x_2 en y_2, hetgeen zeggen wil, dat de *omhullende* van m_2 een een kromme is van de *vierde* klasse.

We kunnen over de beteekenis van de vormen A, C, α, β en γ het volgende opmerken:

A = 0 stelt voor 't middelpunt van (a).

C = 0 is een parabool; immers de som van de coëfficienten van de termen van den tweeden graad is nul.

α is de semi-invariant van den eersten graad.

$\beta = 0$ stelt voor een punt in 't oneindige.

$\gamma = 0$ kunnen we vervangen door

$$\{b_{33}(x_2-y_2)+h^2(b_{23}+\sqrt{b_{23}^2-b_{22}b_{33}})\}\{b_{33}(x_2-y_2)+h^2(b_{23}-\sqrt{b_{23}^2-b_{22}b_{33}})\}=0.$$

$\gamma = 0$ stelt derhalve voor het samenstel van twee punten in 't oneindige, $P_1=0$ en $P_2=0$.

We kunnen bijgevolg schrijven:

$$\gamma \equiv P_1P_2 \quad . . . . (11)$$

De lijn in 't oneindige kunnen we dus voorstellen door

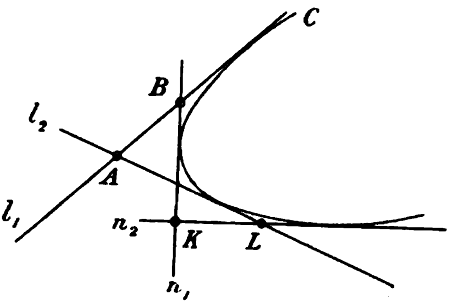
$$\left.\begin{array}{l} P_1=0 \\ P_2=0 \end{array}\right\}.$$

Aangezien $\beta=0$ een punt in 't oneindige is, hebben we

$$\beta \equiv \rho_1P_2+\rho_2P_2 \quad . . . . (12)$$

De twee lijnen l_1 en l_2 wier samenstel wordt weergegeven

door ($A=0$, $C=0$), zijn de twee raaklijnen uit het punt $A=0$, d. w. z. uit het middelpunt van (α), aan de parabool $C=0$.



We nemen op l_1 een punt $B=0$ aan, en op l_2 een punt $L=0$. Uit B en L trekken we de andere raaklijnen n_1 en n_2 aan $C=0$.

Zij $K=0$ het snijpunt van n_1 en n_2.

De vier lijnen l_1, l_2, n_1 en n_2 bepalen een schaar, waarvan een ontaard element gevormd wordt door 't puntenpaar A en K, terwijl een ander ontaard element gevormd wordt door 't puntenpaar B en L.

De vergelijking van de schaar is blijkbaar van den vorm

$$AK+\mu BL=0.$$

Omdat $C=0$ een element is van die schaar, hebben we

$$C\equiv AK+BL \quad \ldots\ldots \quad (13)$$

waarbij μ opgenomen is in L.

Houden we L vast, dan wordt K ondubbelzinnig bepaald door B, en omgekeerd B ondubbelzinnig door K.

De vergelijking (10) voor de omhullende ω laat zich nu met behulp van (13) aldus schrijven:

$$\omega\equiv\alpha A^2K^2+\alpha B^2L^2+2\alpha ABKL-\beta A^2K-\beta ABL+\gamma A^2=0.$$

De raaklijnen uit $B=0$ aan $\omega=0$ krijgt men door $B=0$ in $\omega=0$ te substitueeren. Er komt dan:

$$\alpha A^2K^2-\beta A^2K+\gamma A^2=0 \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

of

$$A^2(\alpha K^2-\beta K+\gamma)=0.$$

Twee van de raaklijnen uit $B=0$ worden dus voorgesteld door

$$\left.\begin{array}{l}A=0\\B=0\end{array}\right\}$$

d. w. z. de lijn l_1 is dubbelraaklijn of buigpuntsraaklijn van

$\omega = 0$, al naar gelang er twee verschillende punten of één enkel punt op l_1 gevonden worden, waaruit drie samenvallende raaklijnen naar $\omega = 0$ kunnen getrokken worden.

Het komt er nu op aan te onderzoeken door hoeveel punten $B = 0$ drie samenvallende raaklijnen aan $\omega = 0$ gaan, of ook: hoeveel punten K aanleiding geven tot het optreden van een factor A in de uitdrukking $\alpha K^2 - \beta K + \gamma$.

Immers in zulk een geval bevat (14) drie factoren A.

Voor een dergelijk punt K geldt blijkbaar:

$$K^2 - \frac{\beta}{\alpha}K + \frac{\gamma}{\alpha} \equiv A \,.\, F,$$

of

$$\left(K - \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right)\left(K - \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}\right) \equiv A \,.\, F.$$

Hieruit volgt, dat

$$\text{òf } K - \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = A$$

$$\text{òf } K - \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} = A.$$

De twee punten $K = 0$, die hieraan voldoen, zijn

$$K_1 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} - A = 0 \text{ en } K_2 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} - A = 0.$$

Deze punten K_1 en K_2 zullen, zoolang niet $\beta^2 - 4\alpha\gamma = 0$ is, nooit kunnen samenvallen.

Er zijn dus twee verschillende punten $B = 0$, waaruit drie samenvallende raaklijnen aan $\omega = 0$ getrokken kunnen worden; m. a. w. l_1 is een dubbelraaklijn en geen buigpuntsraaklijn.

Hetzelfde kunnen we ook bewijzen van l_2.

De lijnen l_1 en l_2, bepaald door $A = 0$ en $C = 0$, zijn dus *dubbelraaklijnen* van $\omega = 0$.

Omdat $C = 0$ een parabool is, en de lijn in 't oneindige onder meer voorgesteld kan worden door $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, kunnen we schrijven:

$$C \equiv P_1Q_1 + P_2Q_2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Met behulp van de uitdrukkingen (11), (12) en (15) kunnen we de vergelijking $\omega = 0$ in den volgenden vorm brengen:

$$\alpha(P_1Q_1 + P_2Q_2)^2 - (\rho_1P_1 + \rho_2P_2)A(P_1Q_1 + P_2Q_2) + P_1P_2A^2 = 0.$$

De vier raaklijnen, die we uit een punt $P_1 = \lambda P_2$ in 't oneindige aan $\omega = 0$ kunnen trekken, vinden we door $P_1 = \lambda P_2$ in $\omega = 0$ te substitueeren. Er komt dan:

$$P_2^2\{\alpha(\lambda Q_1 + Q_2)^2 - (\rho_1\lambda + \rho_2)A(\lambda Q_1 + Q_2) + \lambda A^2\} = 0 \ldots (16)$$

Twee van deze vier raaklijnen zijn blijkbaar gegeven door

$$\left.\begin{array}{l} P_1 = \lambda P_2 \\ P_2 = 0 \end{array}\right\} \text{ of } \left.\begin{array}{l} P_1 = 0 \\ P_2 = 0 \end{array}\right\}.$$

Hieruit volgt, dat de lijn in 't oneindige dubbelraaklijn of buigpuntsraaklijn is aan $\omega = 0$.

Gaan door een punt $P_1 = \lambda P_2$ drie samenvallende raaklijnen, dan moet de uitdrukking $\alpha(\lambda Q_1+Q_2)^2-(\rho_1\lambda+\rho_2)A(\lambda Q_1+Q_2)+\lambda A^2$ nog een factor P_2 bevatten; dit is in 't algemeen het geval voor twee verschillende waarden van λ, zoodat de lijn in 't oneindige een dubbelraaklijn en geen buigpuntsraaklijn is.

We zien dus, dat de omhullende $\omega = 0$ drie dubbelraaklijnen heeft, nl. de lijnen l_1 en l_2 en de lijn in 't oneindige.

De formules van Plücker:

$$n = k(k-1) - 2\tau - 3\beta \quad \text{en} \quad \kappa = 3k(k-2) - 6\tau - 8\beta,$$

geven hier

$$n = 4.3 - 2.3 = 6 \qquad \text{en} \quad \kappa = 3.4.2 - 6.3 = 6.$$

De omhullende $\omega = 0$ is derhalve van de zesde orde en heeft zes keerpunten.

De lijnen l_1 en l_2 snijden elkaar in 't middelpunt van (a). We zullen nu bewijzen, dat ze loodrecht op elkaar staan. We hebben daartoe slechts aan te toonen, dat $A = 0$ ligt op de richtlijn van de parabool $C = 0$.

Om noodelooze becijferingen te voorkomen, zullen we de in geen enkel opzicht beperkende onderstelling maken, dat (a) de lijn o aanraakt en door 't punt X gaat.

Hieruit volgt dan

$$a_{33} = 0 \quad \text{en} \quad a_{23} = 0.$$

De vergelijking $C = 0$ wordt nu:

$$a_{13}x^2 - a_{13}xy + h^2(a_{12}x + a_{22}y) = 0.$$

De vergelijking $A = 0$ krijgt de gedaante:

$$(a_{11} + a_{12})x + (a_{12} + a_{22})y + a_{13} = 0.$$

De richtlijn is blijkbaar op te vatten als de verbindingslijn van de raakpunten der raaklijnen uit de cyclische punten.

Het is gemakkelijk in te zien, dat de cyclische punten I_1 en I_2 tot vergelijkingen hebben:

$$x - y = ih \quad \text{en} \quad x - y = -ih.$$

Omdat n.l. een isotrope lijn (x, y) loodrecht op zichzelf staat, heeft men voor elke isotrope lijn $(x - y)^2 = -h^2$ of $x - y = \pm ih$. $x - y = ih$ en $x - y = -ih$ stellen dus voor de twee vergaarpunten dier lijnen, dat zijn de twee cyclische punten.

De coördinaten van de raaklijnen uit I_1 en I_2 zijn:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{a_{22}ih^2}{(a_{12} + a_{22})h + ia_{13}} \\ \eta_1 &= \frac{a_{13}h - ia_{12}h^2}{(a_{12} + a_{22})h + ia_{13}} \end{aligned}\right\} \quad \text{en} \quad \left.\begin{aligned} \xi_2 &= \frac{-a_{22}ih^2}{(a_{12} + a_{22})h - ia_{13}} \\ \eta_2 &= \frac{a_{13}h + ia_{12}h^2}{(a_{12} + a_{22})h - ia_{13}} \end{aligned}\right\}.$$

De raakpunten van deze lijnen worden voorgesteld door:

$$R_1 \equiv (2a_{13}\xi_1 - a_{13}\eta_1 + h^2a_{12})x + (-a_{13}\xi_1 + h^2a_{22})y + h^2a_{12}\xi_1 + h^2a_{22}\eta_1 = 0,$$

$$R_2 \equiv (2a_{13}\xi_2 - a_{13}\eta_2 + h^2a_{12})x + (-a_{13}\xi_2 + h^2a_{22})y + h^2a_{12}\xi_2 + h^2a_{22}\eta_2 = 0.$$

De richtlijn, d. i. de verbindingslijn van $R_1 = 0$ en $R_2 = 0$ heeft nu tot coördinaten

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -\frac{a_{13}}{a_{12} + a_{22}} \end{aligned}\right\}.$$

Deze voldoen aan $A = 0$, dus $A = 0$ ligt op de richtlijn, waaruit volgt, dat l_1 en l_2 loodrecht op elkaar staan.

§ 3. We gaan nu 't geval beschouwen, dat de kegelsnede (b) een parabool is, zoodat voor (b) de betrekking (1) geldt.

We hebben dan

$$\alpha = 0.$$

De vergelijking (10) van de omhullende ω wordt nu vereenvoudigd tot

$$-A\beta C + A^2\gamma = 0$$

of

$$A[A\gamma - \beta C] = 0.$$

De omhullende is blijkbaar uiteengevallen in 't punt $A = 0$, d. i. het middelpunt van (a), en de kromme van de *derde* klasse, die tot vergelijking heeft:

$$\omega' \equiv A\gamma - \beta C = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Houden we in 't oog, dat nog steeds de betrekkingen (11), (12) en (15) gelden, dan zien we, dat we $\omega' = 0$ kunnen brengen in den vorm:

$$\omega' \equiv AP_1P_2 + (\rho_1 P_1 + \rho_2 P_2)(P_1 Q_1 + P_2 Q_2) = 0.$$

Het blijkt terstond, dat de lijn in 't oneindige hier dubbelraaklijn is.

Berekenen we de orde van deze kromme en het aantal van haar keerpunten uit de reeds hierboven aangehaalde formules van Plücker, dan vinden we:

$$n = 3 \,.\, 2 - 2 = 4 \quad \text{en} \quad k = 3 \,.\, 3 \,.\, 1 - 6 = 3.$$

De hier besproken omhullende is dus van den vierden graad en heeft drie keerpunten.

Is niet alleen (b), maar ook (a) een parabool, dan heeft men ook

$$a_{11} + 2a_{12} + a_{22} = 0,$$

of

$$a_{12} + a_{22} = -(a_{11} + a_{12}).$$

De vergelijking $A = 0$ gaat over in:

$$(a_{11} + a_{12})(x - y) + (a_{13} + a_{23}) = 0.$$

We zien, dat $A = 0$ ook een punt in 't oneindige is, en derhalve voorgesteld kan worden door

$$\sigma_1 P_1 + \sigma_2 P_2 = 0.$$

De vergelijking (17) kan dus den volgenden vorm aannemen:

$$\omega'' \equiv P_1P_2(\sigma_1 P_1 + \sigma_2 P_2) - (\rho_1 P_1 + \rho_2 P_2)(P_1 Q_1 + P_2 Q_2) = 0.$$

Het blijkt nu, dat uit het punt $\beta = 0$, of $\rho_1 P_1 + \rho_2 P_2 = 0$ drie samenvallende raaklijnen ($P_1 = 0$, $P_2 = 0$) aan $\omega'' = 0$ kunnen getrokken worden. Het punt $\beta = 0$ is derhalve een buigpunt van $\omega'' = 0$ en de lijn in 't oneindige buigpuntsraaklijn.

Voor de orde en 't aantal keerpunten van deze kromme vindt men:

$$n = 3.2 - 3 = 3 \quad \text{en} \quad k = 3.3.1 - 8 = 1.$$

De omhullende is hier blijkbaar van de derde orde en heeft één keerpunt.

We kunnen nog opmerken, dat al de hier onderzochte omhullenden van 't geslacht nul zijn.

Voor $\omega = 0$ geldt n.l. $k = 4$, $\tau = 3$, $\beta = 0$, dus $g = \frac{1}{2}(k-1)(k-2) - \tau - \beta = 0$.

Voor $\omega' = 0$ geldt $k = 3$, $\tau = 1$, $\beta = 0$, dus $g = 0$.

Voor $\omega'' = 0$ geldt $k = 3$, $\tau = 0$, $\beta = 1$, dus $g = 0$.

§ 4. Laten we de kegelsneden (a) en (b) samenvallen, dan is de pool M_1 van m_1 het raakpunt van m_1, terwijl dan de lijn m_2 een normaal is van de kromme.

De omhullende van m_2 is nu de *ontwondene* van de kegelsnede $(a) \equiv (b)$.

We zijn dus langs analytischen weg vrij eenvoudig tot het resultaat gekomen, dat de ontwondene van de algemeene kegelsnede een kromme is van de vierde klasse en de zesde orde, in 't bezit van drie dubbelraaklijnen. Twee van deze staan loodrecht op elkaar en komen samen in 't middelpunt van de kegelsnede.

De derde dubbelraaklijn is steeds de lijn in 't oneindige.

Voor 't geval de kegelsnede $(a) \equiv (b)$ een parabool is, wordt α nul, en komt het punt $A = 0$ in 't oneindige te liggen. De ontwondene van de parabool bestaat dus, behalve uit het in 't oneindige gelegen middelpunt, uit een kromme van de derde klasse en van de derde orde; deze kromme heeft de lijn in 't oneindige tot buigpuntsraaklijn.

SUR UN DÉVELOPPEMENT DE M. NEUMANN,

PAR

W. KAPTEYN.

(Utrecht.)

1. On sait que M. C. NEUMANN a demontré [1]) que si une fonction $f(z)$ est holomorphe dans un cercle de rayon r décrit de l'origine, il existe toujours un développement

$$f(z) = \alpha_0 I_0(z) + \alpha_1 I_1(z) + \alpha_2 I_2(z) + \ldots \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$I_n(z)$ représentant la fonction de BESSEL d'ordre n et les coefficients α_n étant determinés par la formule

$$\alpha_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i}\int f(z)\, O_n(z) dz \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

où le chemin d'intégration est la circonférence d'un cercle de rayon $r > 0$ parcourue dans la direction positive.

Dans la formule donnant les coefficients du développement, $O_n(z)$ représente ce que M. NEUMANN appelle la fonction de BESSEL de seconde espèce et ε_n un coefficient dont la valeur est 1 ou 2 selon que $n = 0$ ou $n > 0$.

Dans cette Note je me propose de donne une nouvelle démonstration de ce Théorème qui repose sur une expression nouvelle pour la fonction $O_n(z)$. Cette expression nous permettra en même temps de retrouver l'intégrale

$$\varepsilon_n O_n(z) = \frac{1}{z^{n+1}}\int_0^\infty \{(x + \sqrt{x^2+z^2})^n + (x - \sqrt{x^2+z^2})^n\} e^{-x} dx \quad (3)$$

que M. NEUMANN a donné sans démonstration.

[1]) Theorie der Besselschen Functionen 1867.

Remarquons d'abord que le développement précédent se déduit aisément du développement

$$\frac{1}{y-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n O_n(y) I_n(z) \qquad \text{mod}\, y > \text{mod}\, z \,. \quad (4)$$

En effet si l'on aurait démontré cette équation l'intégrale de CAUCHY

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{f(y)dy}{y-z}$$

donnerait immédiatement

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n I_n(z) \int_r f(y) O_n(y) dy$$

ce qui est équivalent au développement cherché.

2. La formule de M. SCHLÖMILCH

$$e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = I_0(z) + t I_1(z) + t^2 I_2(z) + \dots$$
$$- \frac{1}{t} I_1(z) + \frac{1}{t^2} I_2(z) - \dots$$

permet d'exprimer $I_n(z)$ en forme de résidu. En effet on a

$$I_n(z) = (-1)^n \underset{(0)}{\mathcal{E}}\, e^{\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} t^{n-1}. \quad \dots \quad (5)$$

Proposons nous maintenant d'exprimer aussi $O_n(y)$ ou plutôt $(-1)^n \varepsilon_n O_n(y)$ en forme de résidu. Pour y arriver nous avons suivi un chemin qui est loin d'être irréprochable; cependant il nous semble qu'il ne sera pas intérêt de le faire connaître.

La somme

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n O_n(y) t^n$$

où $O_n(y)$ est déterminé par l'équation

$$\varepsilon_n O_n(y) = \frac{n}{2} \sum_{p=0}^{\leq \frac{n}{2}} \frac{(n-p-1)!}{p!} \left(\frac{2}{y}\right)^{n-2p+1} \quad . \; (6)$$

s'écrit, si nous ordonnons suivant les puissances négatives de y

$$
\begin{aligned}
S = & \frac{1}{y}\,(1 + 2t^2 + 2t^4 + 2t^6 + \ldots) \\
& - \frac{2}{y^2}\,(t + 3t^3 + 5t^5 + 7t^7 + \ldots) \\
& + \frac{2}{y^3}\,(4t^2 + 16t^4 + 36t^6 + 64t^8 + \ldots) \\
& - \frac{2}{y^4}\,(24t^3 + 120t^5 + 336t^7 + 720t^9 + \ldots) \\
& + \ldots\ldots
\end{aligned}
$$

ce qui, en admettant mod $t < 1$, se réduit à

$$S = \frac{1}{y}\,\frac{1+t^2}{1-t^2} - \frac{2}{y^2}\,\frac{t(1+t^2)}{(1-t^2)^2} + \frac{8}{y^3}\,\frac{t^2(1+t^2)}{(1-t^2)^2} - \frac{48}{y^4}\,\frac{t^3(1+t^2)}{(1-t^2)^4} + \ldots$$

ou, en introduisant $(1 - t^2)y = z$ à

$$S = (1+t^2)\left[\frac{1}{z} - \frac{2t}{z^2} + \frac{8t^2}{z^3} - \frac{48t^3}{z^4} + \ldots\right]$$

$$= \frac{1+t^2}{z}\left[1 - 1!\left(\frac{2t}{z}\right) + 2!\left(\frac{2t}{z}\right)^2 - 3!\left(\frac{2t}{z}\right)^3 + 4!\left(\frac{2t}{z}\right)^4 - \ldots\right].$$

Remplaçons maintenant cette série divergente par l'intégrale

$$S = \frac{1+t^2}{z}\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{1 + \frac{2t}{z}x} \quad [1]$$

alors on obtient

$$\sum_0^\infty (-1)^n \varepsilon_n O_n(y)\, t^n = (1+t^2)\int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{(1-t^2)y + 2tx} \quad . \quad . \quad (7)$$

d'où

$$(-1)^n \varepsilon_n O_n(y) = \int_0^\infty e^{-x}dx \;\underset{(0)}{\mathcal{E}}\, \frac{1+t^2}{t^{n+1}[(1-t^2)y + 2tx]} \quad . \quad . \quad (8)$$

[1]) Borel, Series divergentes, p. 55.

3. La série dont nous avons cherché la somme est divergente pour toutes les valeurs de t; elle appartient aux séries de TAYLOR à rayon de convergence nul, dont s'est occupé M. E. BOREL dans son mémoire connu sur les Séries Divergentes (*Ann. de l'Ecole Norm.* Ch. III). L'équation (7) ne saurait donc représenter une équation dans le sens ordinaire. Cependant nous pourrons l'interpréter de cette façon que le second membre nous donne une fonction $\phi(t)$ dont le développement

$$\phi(0) + t\phi'(0) + \frac{t^2}{2!}\phi''(0) + \ldots$$

possède les mêmes coefficients que le développement donné du premier membre. Et c'est justement cette égalité qui est exprimée par la formule (8).

Posons, pour démontrer directement la formule (8)

$$\alpha = \frac{x + \sqrt{x^2+y^2}}{y} \qquad \beta = \frac{x - \sqrt{x^2+y^2}}{y}$$

et développons

$$\frac{1+t^2}{1+\frac{2x}{y}t - t^2} = \frac{1+t^2}{(1+\alpha t)(1+\beta t)} = -1 + \frac{1}{1+\alpha t} + \frac{1}{1+\beta t} =$$

$$= 1 - (\alpha+\beta)t + (\alpha^2+\beta^2)t^2 - (\alpha^3+\beta^3)t^3 + \ldots$$

alors on obtient

$$\mathop{\mathcal{E}}_{(0)} \frac{1+t^2}{t^{n+1}[(1-t^2)y+2tx]} = \frac{(-1)^n}{y}(\alpha^n+\beta^n)$$

et par suite

$$\int_0^\infty e^{-x}dx \mathop{\mathcal{E}}_{(0)} \frac{1+t^2}{t^{n+1}[(1-t^2)y+2tx]} = \frac{(-1)^n}{y}\int_0^\infty (\alpha^n+\beta^n)\, e^{-x}dx.$$

Or, le dernier membre n'est autre chose que l'intégrale (3) de M. NEUMANN; par suite l'équation (8) est démontré rigoureusement.

On pourrait aisément démontrer la formule (8) indépendemment de l'intégrale de M. NEUMANN. En effet

$$\alpha^n + \beta^n = (\alpha + \beta)^n + n(\alpha + \beta)^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2!}(\alpha+\beta)^{n-4} +$$

$$+ \frac{n(n-4)(n-5)}{3!}(\alpha+\beta)^{n-6} + \ldots$$

dont le dernier terme est 2 ou $n(\alpha + \beta)$ selon que n est un nombre pair ou impair. Or, on a

$$\alpha + \beta = \frac{2x}{y}$$

par suite

$$\alpha^n + \beta^n = \left(\frac{2}{y}\right)^n x^n + n\left(\frac{2}{y}\right)^{n-2} x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2!}\left(\frac{2}{y}\right)^{n-4} x^{n-4} + \ldots$$

et

$$\frac{1}{y}\int_0^\infty (\alpha^n + \beta^n)\, e^{-x} dx =$$

$$= \frac{n}{2}\left[(n-1)!\left(\frac{2}{y}\right)^{n+1} + \frac{(n-2)!}{1!}\left(\frac{2}{y}\right)^{n-1} + \frac{(n-3)!}{2!}\left(\frac{2}{y}\right)^{n-3} + \ldots\right]$$

$$= \frac{n}{2}\sum_{p=0}^{\leqq \frac{n}{2}} \frac{(n-p-1)!}{p!}\left(\frac{2}{y}\right)^{n-2p+1}$$

ce qui s'accorde avec la définition (6).

4. Revenons maintenant à la sommation de la série

$$\mathrm{P} = \sum_0^\infty \varepsilon_n \mathrm{O}_n(y)\mathrm{I}_n(z).$$

Si dans cette série on remplace $\mathrm{O}_n(y)$ par sa valeur (8) on obtient

$$\mathrm{P} = \int_0^\infty e^{-x}dx \underset{(0)}{\mathcal{E}} \frac{1+t^2}{t[(1-t^2)y + 2tx]} \sum_0^\infty (-1)^n \frac{\mathrm{I}_n(z)}{t^n}.$$

Or, il est évident que

$$\underset{(0)}{\mathcal{E}} \frac{1+t^2}{t[(1-t^2)y + 2tx]} \sum_0^\infty \mathrm{I}_n(z)t^n = 0$$

par suite, d'après la formule de M. SCHLÖMILCH

$$P = \int_0^\infty e^{-z} dx \, \underset{(0)}{\mathcal{E}} \frac{e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}}{t} \frac{1 + t^2}{(1 - t^2)\, y + 2tx}.$$

Remplaçons pour évaluer ce résidu t par $-\frac{1}{t}$, alors on aura

$$\underset{(0)}{\mathcal{E}} = \frac{1}{2\pi i} \int_r^{\text{pos.}} \frac{e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}}{t} \frac{1 + t^2}{(1 - t^2)\, y + 2tx} dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{r}}^{\text{neg.}} \frac{e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}}{t} \frac{1 + t^2}{(1 - t^2)\, y + 2tx} dt.$$

La valeur de r étant soumis à la seule condition

$$r < \text{mod} \frac{x - \sqrt{x^2 + y^2}}{y} = \text{mod}\, \beta$$

il est évident que si l'on prend r suffisamment petit, la différence

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{1}{r}}^{\text{pos.}} \frac{e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}}{t} \frac{1 + t^2}{(1 - t^2)\, y + 2tx} dt -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_r^{\text{neg.}} \frac{e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}}{t} \frac{1 + t^2}{(1 - t^2)\, y + 2tx} dt$$

est égal à la somme des résidus de la même fonction par rapport aux pôles simples $t = \alpha$ et $t = \beta$ situés dans la couronne entre les deux circonférences de rayons r et $\frac{1}{r}$.

Or, on a

Res. par rapport à α : $-\dfrac{e^{\frac{z}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)}(1 + \alpha^2)}{\alpha y(\alpha - \beta)} = -\dfrac{e^{\frac{xz}{y}}}{y}$

Res. » β : $-\dfrac{e^{\frac{z}{2}\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)}(1 + \beta^2)}{\beta y\, (\beta - \alpha)} = -\dfrac{e^{\frac{xz}{y}}}{y}$

à cause des équations évidentes

$$\alpha - \frac{1}{\alpha} = \beta - \frac{1}{\beta} = \alpha + \beta = \frac{2x}{y}$$

$$\frac{1+\alpha^2}{\alpha - \beta} = \alpha\,, \qquad \frac{1+\beta^2}{\beta - \alpha} = \beta.$$

Par suite la différence se réduit à $-2\dfrac{e^{\frac{xz}{y}}}{y}$, donc

$$\underset{(0)}{\mathcal{E}} \frac{e^{\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)}}{t} \, \frac{1+t^2}{(1-t^2)\,y + 2tx} = \frac{e^{\frac{xz}{y}}}{y}$$

et

$$\mathrm{P} = \frac{1}{y}\int_0^\infty e^{-x} e^{\frac{xz}{y}}\, dx = \frac{1}{y}\int_0^\infty e^{\frac{z-y}{y}x}\, dx.$$

En posant maintenant

$$z = \rho\,(\cos\alpha + i\sin\alpha) \quad \text{et} \quad y = \sigma\,(\cos\theta + i\sin\theta)$$

la partie réelle de

$$\frac{z-y}{y} \quad \text{ou} \quad \frac{\rho}{\sigma}\cos(\alpha - \theta) - 1$$

sera toujours négative quand on a

$$\rho < \sigma \quad \text{ou} \quad \operatorname{mod} z < \operatorname{mod} y.$$

Si cette condition est remplie, on aura donc

$$\sum_0^\infty \varepsilon_n \mathrm{O}_n(y)\, \mathrm{I}_n(z) = \frac{1}{y-z}$$

et

$$\sum_0^\infty \alpha_n \mathrm{I}_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_r \left[\Sigma\, \varepsilon_n \mathrm{O}_n(y) \mathrm{I}_n(z)\right] f(y)\,dy$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_r \frac{f(y)}{y-z}\,dy = f(z)$$

ce qui prouve le théorème de M. Neumann.

OVER EENE UITBREIDING VAN HET THEOREMA VAN TCHEBYCHEFF

DOOR

A. E. RAHUSEN.
('s Gravenhage.)

Men denke zich eene grootheid, die verschillende waarden, elk met een bepaalde waarschijnlijkheid, kan aannemen. Bepaalt men de som van de producten dezer waarden met de overeenkomstige waarschijnlijkheden, d. i. de gemiddelde waarde der grootheid, dan kunnen de verschillen met deze gemiddelde waarde als afwijkingen worden opgevat. De middelbare afwijking, d. i. de wortel uit het gemiddelde vierkant der afwijking zij M.

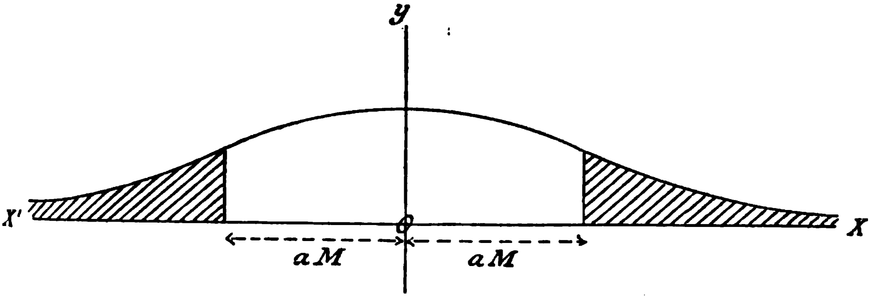
Voldoen deze afwijkingen aan de afwijkingswet van Gausz, is m. a. w. de afwijkingswet normaal, dan valt het gemakkelijk de waarschijnlijkheid te bepalen eener afwijking, die tusschen bepaalde grenzen valt. In vele gevallen, die zich vooral in de praktijk der verzekering voordoen, ontbreekt echter de zekerheid, dat de afwijkingen aan de wet van Gausz zullen voldoen, terwijl het toch van belang is iets te weten omtrent de waarschijnlijkheid eener afwijking, die eene gegeven grens overschrijdt.

Voor dit geval heeft Tchebycheff een theorema gegeven, (*Journal de Liouville* XII, 1867, p. 177), hetwelk leert, dat hoe ook de afwijkingswet moge zijn, de waarschijnlijkheid eener positieve of negatieve afwijking, gelijk aan of grooter dan αM, hoogstens gelijk is aan $\frac{1}{\alpha^2}$.

In de eerste plaats moge hier een zeer eenvoudig bewijs van deze stelling worden gegeven. Men denke zich de afwijkingswet meetkundig voorgesteld (zie fig. 1), waarbij de afwijkingen als abscissen zijn uitgezet en ydx de waarschijnlijkheid eener

afwijking tusschen x en $x + dx$ voorstelt. Hoewel de vorm der afwijkingskromme niet bekend is, weet men toch, dat de inhoud der figuur begrepen tusschen de kromme en de X-as gelijk 1 en het traagheidsmoment dezer figuur ten opzichte van de Y-as gelijk M^2 is.

Fig. 1.



Trekt men de ordinaten $+\alpha M$ en $-\alpha M$, dan stelt de inhoud van het buiten deze ordinaten gelegen deel der figuur (in de teekening geärceerd), de waarschijnlijkheid eener positieve of negatieve afwijking $\geq \alpha M$ voor. Stelt men dezen inhoud door x, het traagheidsmoment en den traagheidsstraal der geärceerde figuur ten opzichte der Yas door T en door R voor, dan heeft men

$$x = \frac{T}{R^2}.$$

Nu is T, het traagheidsmoment der geärceerde figuur, hoogstens gelijk aan het traagheidsmoment der geheele figuur, dus hoogstens gelijk aan M^2, en is R, de traagheidsstraal, minstens gelijk aan αM. Uit $T \leq M^2$ en $R \geq \alpha M$ volgt echter onmiddellijk

$$x \leq \frac{1}{\alpha^2},$$

waarmede de juistheid van de stelling van Tchebycheff is aangetoond.

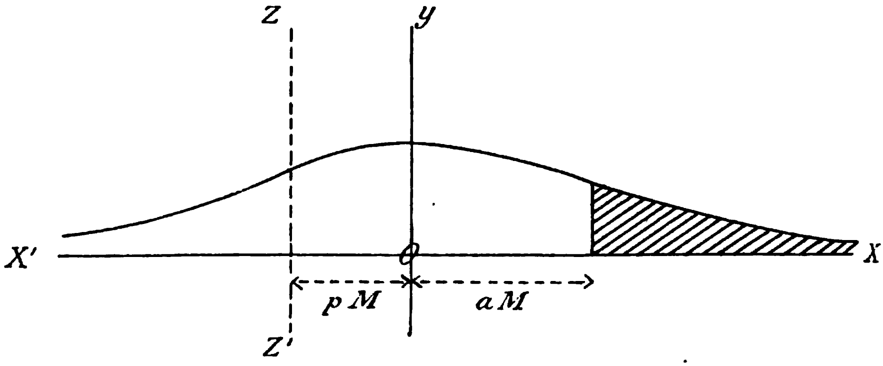
Men kan hier opmerken, dat het niet mogelijk is eene algemeen geldende, nauwere grens te vinden. Dit volgt onmiddellijk uit de mogelijkheid de afwijkingswet zoodanig te kiezen, dat de gevonden grens juist bereikt wordt. Daartoe moet het traagheidsmoment van het niet-geärceerde deel der figuur 0 en

de traagheidsstraal van het gearceerde deel gelijk αM zijn. Het eerste deel der figuur moet zich dus concentreeren in de Y-as, het tweede deel in de beide ordinaten $+\alpha$M en $-\alpha$M. Aldus vindt men eene afwijkingswet, volgens welke slechts 3 afwijkingen mogelijk zijn, groot achtereenvolgens $+\alpha$M, 0 en $-\alpha$M met de overeenkomstige waarschijnlijkheden $\frac{1}{2\alpha^2}$, $1-\frac{1}{\alpha^2}$ en $\frac{1}{2\alpha^2}$.

Het theorema van TCHEBYCHEFF geeft eene maximumwaarde voor de waarschijnlijkheid eener positieve of negatieve afwijking, die eene bepaalde grens overschrijdt. In vele gevallen, waarin van dit theorema kan worden partij getrokken, komen echter alleen de ongunstige afwijkingen, dus afwijkingen met een bepaald teeken in aanmerking, en het is daarom van belang te onderzoeken, of het mogelijk is voor het geval alleen positieve afwijkingen worden beschouwd, eene nauwere grens te vinden.

Men denke zich weer de afwijkingswet meetkundig voorgesteld (zie fig. 2) en, nu alleen aan de positieve zijde de

Fig. 2



ordinaat αM getrokken. Zij ZZ' eene lijn op een afstand pM evenwijdig aan en aan de negatieve zijde van de Y-as getrokken.

Zij voorts x de waarschijnlijkheid eener positieve afwijking gelijk aan of grooter dan αM, dus de inhoud van de gearceerde figuur, T het traagheidsmoment en R de traagheidsstraal dezer figuur ten opzichte van de Z-as, dan heeft men weer

$$x = \frac{T}{R^2}.$$

Nu is T hoogstens gelijk aan het traagheidsmoment der ge-

heele figuur ten opzichte der Z-as, welk moment gelijk $M^2(1+p^2)$ is, terwijl R minstens gelijk $(\alpha+p)M$ moet zijn.

Uit $T \leq M^2(1+p^2)$ en $R \geq M(\alpha+p)$, volgt

$$x \leq \frac{1+p^2}{(\alpha+p)^2}.$$

Deze ongelijkheid geldt voor elke positieve waarde van p. Door $p=0$ te nemen levert zij de grenswaarde van Tchebycheff $\frac{1}{\alpha^2}$ op.

Om de nauwst mogelijke grens te vinden, moet p zoodanig bepaald worden, dat bovenstaande breuk minimum wordt. Dit blijkt het geval te zijn voor $p=\frac{1}{\alpha}$, voor welke waarde men vindt

$$x < \frac{1}{\alpha^2+1}.$$

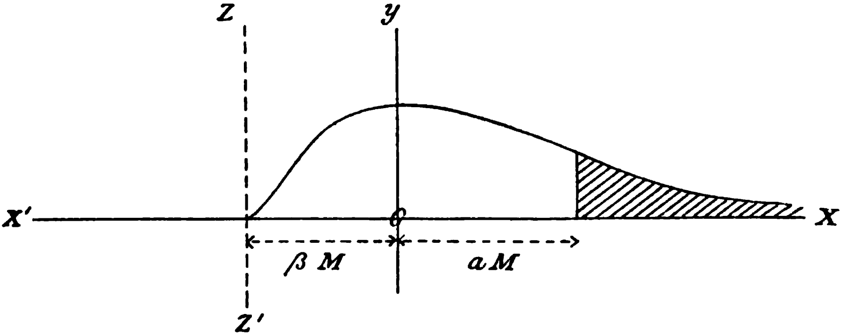
Ook hier bestaat de mogelijkheid de afwijkingswet zoodanig te kiezen, dat de gevonden grenswaarde juist bereikt wordt. Daartoe moet het niet-geärceerde deel der figuur zich concentreeren in de Z-as en het geärceerde deel in de ordinaat αM. Men vindt dan eene afwijkingswet, volgens welke slechts twee afwijkingen mogelijk zijn, groot αM en $-\frac{M}{\alpha}$, met de waarschijnlijkheden $\frac{1}{\alpha^2+1}$ en $\frac{\alpha^2}{\alpha^2+1}$. Hieruit laat zich afleiden, dat, zoolang omtrent de afwijkingswet niets naders bekend is, het niet mogelijk is eene kleinere grenswaarde te vinden dan $\frac{1}{\alpha^2+1}$.

In vele gevallen zal echter bekend zijn de grootste negatieve afwijking. Weet men namelijk, dat de grootheid die beschouwd wordt, geen negatieve waarden kan aannemen, dan kan de absolute waarde eener negatieve afwijking niet grooter zijn dan de gemiddelde waarde der grootheid. In dit geval zal het soms mogelijk zijn voor de waarschijnlijkheid eener positieve afwijking gelijk aan of grooter dan αM eene maximumwaarde te vinden kleiner dan $\frac{1}{\alpha^2+1}$. Men kan nl. aantoonen, dat deze

waarschijnlijkheid niet grooter kan zijn $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$, waarbij βM de absolute waarde der grootste negatieve afwijking voorstelt.

In fig. 3 is de afwijkingskromme weder meetkundig voorgesteld. De as ZZ' is hier op een afstand βM aan de negatieve zijde van de Y-as getrokken en gaat dus door het negatieve eindpunt der afwijkingskromme.

Fig. 3.



Zij x de waarschijnlijkheid eener positieve afwijking gelijk aan of grooter dan αM, dus de inhoud van het geärceerde deel der figuur, S het statisch moment van dit deel ten opzichte der Z-as en L de afstand van het zwaartepunt van dit deel tot de Z-as.

Men heeft dan

$$x = \frac{S}{L}.$$

Hierin is S hoogstens gelijk aan het statisch moment der geheele figuur ten opzichte der Z-as, welk moment blijkbaar gelijk βM is, en is L minstens gelijk $(\alpha + \beta)$ M.

Uit $S \leq \beta M$ en $L \geq (\alpha + B) M$ volgt nu onmiddellijk:

$$x \leq \frac{\beta}{\alpha+\beta}$$

waarmede het gestelde bewezen is.

Bij vergelijking van de beide gevonden grenzen $\frac{1}{\alpha^2+1}$ en $\frac{\beta}{\alpha+\beta}$ blijkt, dat voor $\alpha > \frac{1}{\beta}$ de eerste en dat voor $\alpha < \frac{1}{\beta}$

de tweede de kleinste waarde aanwijst, en dus de maximumwaarde voorstelt van de waarschijnlijkheid eener positieve afwijking $\geq \alpha M$.

Onderzoekt men, of het mogelijk is, de afwijkingswet zoodanig te kiezen, dat de grenswaarde $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$ bereikt wordt, dan blijkt dat dit voor $\alpha < \frac{1}{\beta}$ nooit geheel het geval zal zijn. Daar men echter kan aantoonen, dat het mogelijk is tot deze grens onbepaald te naderen, zal men ook hier mogen besluiten, dat het niet mogelijk is voor dit geval eene nauwere grens aan te geven.

Resumeerende werd in het voorgaande aangetoond, dat *hoe ook de afwijkingswet moge zijn, de waarschijnlijkheid eener positieve afwijking* $\geq \alpha M$ *hoogstens gelijk zal zijn aan het kleinste van de beide getallen* $\frac{1}{\alpha^2 + 1}$ *en* $\frac{\beta}{\alpha + \beta}$. *Hierin stelt* M *de middelbare afwijking en* βM *de absolute waarde der grootste negatieve afwijking voor.*

QUADRILATÈRE COMPLET; DROITE DES ORTHOCENTRES ET DROITE DES MILIEUX DES DIAGONALES (DÉMONSTRATION S'APPUYANT SUR LES SEULS LIVRES D'EUCLIDE)

PAR

C. A. CIKOT.

(Bois-le-Duc.)

La propriété bien connue que les orthocentres des quatre triangles que forment les côtés d'un quadrilatère complet, pris trois à trois, sont sur une même droite, se démontre généralement par les procédés de la géométrie nouvelle; en voici une démonstration par la géométrie „ancienne." (Le lecteur est prié de faire la figure).

Soit ABCD un quadrilatère, AD et BC se rencontrant en E, DC et AB en F, H_1 l'orthocentre de EDC, H_2 celui de EAB, G le milieu de AC, I celui de BD et K celui de AD, je dis que H_1H_2 est perpendiculaire à GI. En effet, les arcs de cercle DEC et AEB sont semblables, comme étant capables d'un même angle, donc leurs rayons sont dans le rapport de CD et de AB, et de même les distances de leurs centres à CD et à AB, lesquelles distances sont les moitiés respectives de EH_1 et de EH_2. Les triangles EH_1H_2 et KGI sont semblables, puisque $KG \perp EH_1$. $KI \perp EH_2$ et $EH_1 : EH_2 = KG : KI$. Il en résulte que $GI \perp H_1H_2$. On prouverait de la même manière que la droite qui joint deux autres orthocentres quelconques est perpendiculaire à GI, donc les quatre orthocentres sont sur une même droite $\perp$ GI.

En définitive, on prouverait de même que la droite des orthocentres est perpendiculaire à la droite de jonction de G (ou de I) et du milieu de la diagonale extérieure, donc les trois milieux sont sur une même droite.

(En appliquant les procédés de la Trigonométrie on trouve: $EH_1 = DC \operatorname{ctg} E$; $EH_2 = AB \operatorname{ctg} E$, donc, etc.)

SUR UN POINT REMARQUABLE DU QUADRILATÈRE INSCRIT

PAR

C. A. CIKOT.
(Bois-le-Duc.)

Il y a peut-être une dizaine d'années deux Revues de mathématiques élémentaires posèrent ce problème: „Prouver que dans un quadrilatère inscrit les perpendiculaires abaissées des milieux des côtés sur les côtés opposés passent par le même point." Quelques lecteurs ont résolu ce problème en observant que ces perpendiculaires sont les médiatrices d'un quadrilatère symétrique au premier par rapport à son barycentre, et que, par suite, le point q en question est le centre du cercle circonscrit pour le second quadrilatère. Je crois qu'on a oublié d'ajouter que ces perpendiculaires passent par les centres des cercles de neuf points des triangles CDE (voir la figure), etc., et que les perpendiculaires abaissées du milieu d'une diagonale sur l'autre, passent également par ce point. Voici donc six droites passant par ce point.

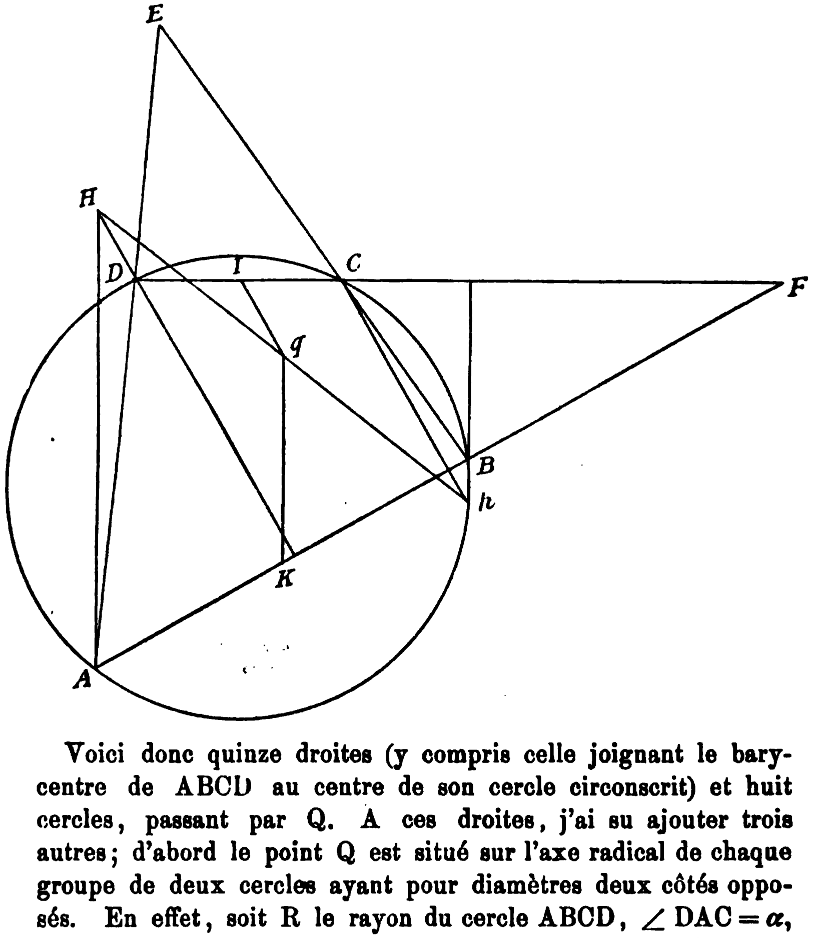
Plus tard, en scrutant cette question, je trouvai successivement que 18 droites et quatre cercles égaux passent par ce point. Doutant de la nouveauté je trouvai dans les Revues qu'en effet d'autres avant moi avaient trouvé la plupart de ces propriétés; seulement, il semble que trois droites n'aient pas été remarquées par eux.

Voici ce qu'on a ajouté à la première propriété: Soit ABCD un quadrilatère inscrit, H_d l'orthocentre de ABC, etc. les quatre droites DH_d, etc. se partagent en deux parties égales, et, par suite, passent par un même point; ce point est le point q du premier problème; en outre les quadrilatères ABCD et $H_aH_bH_cH_d$ sont symétriques, etc.

Les quatre droites de Wallace, obtenues en joignant les projections de chacun des sommets sur les côtés du triangle

qui admet les trois autres pour sommets, passent par ce même point. Les cercles de neuf points de chacun des triangles ABC, ABD, ADC et BCD passent par ce même point.

De même les cercles de neuf points de chacun des triangles $H_aH_bH_c$, etc. Les 12 projections mentionnées ci-dessus sont quatre par quatre sur des cercles dont trois ont leur centre en Q, etc.



Voici donc quinze droites (y compris celle joignant le barycentre de ABCD au centre de son cercle circonscrit) et huit cercles, passant par Q. A ces droites, j'ai su ajouter trois autres; d'abord le point Q est situé sur l'axe radical de chaque groupe de deux cercles ayant pour diamètres deux côtés opposés. En effet, soit R le rayon du cercle ABCD, $\angle DAC = \alpha$, $\angle DBC = \beta$; on trouve $R \cos \alpha$ pour la distance δ de Q au milieu de AB, et $R \cos \beta$ pour la distance d de Q au milieu de CD. Donc $\delta^2 - d^2 = R^2 (\cos^2\alpha - \cos^2\beta)$. Les rayons des cercles sont $R \sin \beta$ et $R \sin \alpha$; de plus $R^2 (\sin^2\beta - \sin^2\alpha) =$

$R^2(\cos^2\alpha - \cos^2\beta) = \delta^2 - d^2$; donc Q est un point de l'axe radical des deux cercles AB et CD. On prouverait de même que Q est sur l'axe radical de l'autre groupe.

Enfin q est sur la droite des orthocentres; en effet, soient H et h les orthocentres de ADF et de BCF, I le milieu de CD; on voit de suite que IQ, étant parallèle à DH et Ch, passe par le milieu de Hh; de même Kq, donc q est le milieu de Hh. Puisque q est également le milieu de H_1h_1 (H_1 étant l'orthocentre de EAB, h_1 celui de ECD), il en résulte encore que $H_1h = Hh_1$.

En fin de compte se donnent rendez-vous en Q 18 droites et 8 cercles égaux, tandis qu'en outre Q est le centre de 5 cercles (e. a. du cercle passant par les centres des huit cercles de neuf points et du cercle tangent à ces cercles). Il me semble que ce point ne le cède guère en importance au point de Lemoine.

Tout ceci est susceptible de développements, p. ex. soit ABCDE un pentagone inscrit et soit q_a le point q de ABCDE, etc., le pentagone $q_aq_bq_cq_dq_e$ est homologue à ABCDE, etc.; les droites Aq_a, etc. passent par un même point, etc.

De même il eût été facile d'étendre le nombre des droites passant par q : p. ex. passent par q les diagonales du parallélogramme obtenu en abaissant les perpendiculaires des sommets de ABCD sur ses diagonales; passent encore par q les droites joignant les symétriques du centre par rapport aux côtés opposés et aux diagonales; ça ferait vingt-trois droites passant par q.

Littérature : Catalan, *Théorèmes et problèmes*; *Journal de Vuibert*; *Vriend der Wiskunde* (surtout année 1895, pag. 6 et suivantes); *Intermédiaire* (1894, 1895, 1901 et 1902).

BIBLIOGRAPHIE.

Inleiding tot de studie der elliptische functien van Weierstrass, door Dr. G. SCHOUTEN, 152 blz., Delft, J. Waltman Jr., 1902.

Terwijl vroeger beschouwingen over elliptische integralen het uitgangspunt vormden voor de studie der elliptische functiën, wordt op het voorbeeld van Weierstrass thans die weg door velen verlaten en geeft men met den Schrijver dezer Inleiding aan de leer der analytische functiën als basis de voorkeur. De Schrijver vat zijn taak breed op. Hij wenscht in dit boek, dat vooral als eene toelichting der bekende „Formeln und Lehrsätze" van Schwartz moet dienen, eerst een overzicht te geven van alles, wat voor de eigenlijke studie der elliptische functiën noodig is, en daarom behandelt hij aan de hand van het leerboek van O. Biermann de hoofdpunten uit de leer der analytische functiën en in het algemeen dat deel der algemeene functie-theorie, waarvan de zoogenaamde stellingen van Weierstrass en van Mittag-Leffler de kern vormen.

Als voorbereiding en tot toepassing van de algemeene beginselen, worden in hoofdstuk II en III de enkelvoudige periodieke functiën en hunne omkeeringen beschouwd, en tracht de Schrijver rechtstreeks te bewijzen, dat de functiën van de eenvoudigste soort met de nulpunten $n\omega$ en $(n + \frac{1}{2})\,\omega$ periodiek zijn. Wij gelooven, dat de Schrijver hier van eene in de voorrede aangehaalde volkomen juiste stelling eene niet gerechtvaardigde toepassing maakt.

De door hem op blz. 55 en ook op blz. 69 gevolgde redeneering is feitelijk deze: Indien twee meromorphe functiën $f(z)$ en $\phi(z)$ dezelfde polen hebben en hare som $f(z) + \phi(z)$ eene overal holomorphe functie is, moet die som eene constante zijn. Desnoods door een eenvoudig voorbeeld kan men zich er van overtuigen, dat die gevolktrekking niet gewettigd is.

Met het vierde hoofdstuk is dan de Schrijver genaderd tot

de ζ-functie (die evenals bij Schwarz steeds door $\frac{\sigma'}{\sigma}$ wordt aangeduid) en komt hij tot de constructie der meromorphe functiën p en p' met twee verschillende perioden.

In het vijfde hoofdstuk wordt aangegeven, hoe men in het algemeen dubbel-periodieke functiën met behulp der σ uit polen en nulpunten kan opbouwen, of wel met behulp der ζ en van hare afgeleiden kan construeeren, zoo het gedrag der functie in de omgeving harer polen bekend mag worden ondersteld.

Hiermede eindigen de meer theoretische beschouwingen. In hoofdstuk VI staat de Schrijver stil bij het bijzondere geval van bestaanbare invarianten, zooals dit meestal in de toepassingen voorkomt. Hij geeft aan, hoe de algemeene elliptische integraal tot den normaalvorm moet worden terug gebracht, en schetst het verloop van p en p' bij positieven en bij negatieven determinant. In het laatste hoofdstuk komen vier toepassingen: twee gevallen van centrale beweging, de slinger en de wenteling van een lichaam om zijn zwaartepunt.

Wie langs geleidelijken weg zich eenige kennis wil verwerven van de elliptische functiën van Weierstrass, kan van deze Inleiding een nuttig gebruik maken. Kl.

Théorie élémentaire des Séries, par MAURICE GODEFROY, 266 blz., Parijs, Gauthier-Villars, 1903.

De Schrijver stelde zich tot taak een overzicht te geven van de tegenwoordige analyse, voor zoover deze op de reeksen betrekking heeft, en zoo is een leerboek ontstaan, dat door den beoefenaar der wiskunde, zoowel den beginner als den meergevorderden, met belangstelling zal worden gelezen.

De voorstellingswijze is eenvoudig en duidelijk, alles is vermeden, wat den met de analyse nog weinig vertrouwden lezer zou kunnen afschrikken, en eene geleidelijke behandeling, waarbij toch de strengheid van het betoog niet uit het oog wordt verloren, maakt dit werk als leerboek zeer geschikt.

De vrij uitvoerige historische en bibliographische verwijzingen zijn te waardeeren, maar meer nog de met zorg gekozen vraagstukken, die groepsgewijze aan het eind van elk hoofdstuk voorkomen.

Uitteraard vindt men ook hier bijeen, wat evengoed of op overeenkomstige wijze elders in de leerboeken over oneindige

reeksen wordt behandeld, maar bij de lezing wordt men telkens getroffen door het feit, dat de Schrijver, die van zijne lezers volstrekt geen uitgebreide kennis onderstelt, met elementaire hulpmiddelen veel weet te bereiken.

Te prijzen valt de uiteenzetting van het begrip der uniforme convergentie en de streng analytische methode, die bij de behandeling der goniometrische en der exponentieele functies is gevolgd, terwijl de uitvoerige studie der Γ-functie in het laatste hoofdstuk als een gewenscht toevoegsel kan worden beschouwd.

Hoezeer de strekking van het boek van algemeen theoretischen aard is, heeft de Schrijver de gelegenheid niet laten voorbijgaan om belangwekkende bijzonderheden te behandelen. Wij noemen alleen: de stellingen van Hermite over het transcendente karakter van het getal *e* en de onmeetbaarheid van het getal π, de hypergeometrische reeks, de veeltermen van Hermite, die van Legendre, de functies van Bessel, de getallen en functies van Bernoulli, de constante en de sommatieformule van Euler, de formule van Césaro, de doorloopende niet differentieerbare functie van Weierstrass, allerlei onderwerpen, waarvan men de behandeling in een elementair gehouden leerboek niet zou verwachten. Kl.

Mehrdimensionale Geometrie von Dr. P. H. Schoute, Professor an der Universität zu Groningen Erster Teil. Die linearen Räume. Preis 10 Mk. Sammlung Schubert XXXV. Leipzig, G. J. Göschen'sche Verlagshandlung.

Door het verschijnen van dit werk in de „Sammlung Schubert" is het doel, dat er mede wordt beoogd, reeds eenigszins omschreven. De vorige eeuw — vooral haar laatste helft — was getuige eener ontwikkeling der wiskunde in alle richtingen, maar het scheen wel, dat voornamelijk de meest abstracte gedeelten dezer wetenschap op het grootste aantal beoefenaren mochten wijzen.

Daardoor ontstond het gevaar, dat de speculatieve beschouwingen der wiskundigen hen steeds verder zouden verwijderen van het standpunt ingenomen door hen, die geroepen zijn met de toepassingen der wiskunde rekening te houden en alzoo twee groepen vijandig tegenover elkander zouden komen te staan.

Toch kan de elementaire wiskunde niet straffeloos zich geheel buiten de ontwikkeling der meer abstracte blijven bewegen, en

aan die overtuiging heeft men tegenwoordig een geheele reeks leerboeken te danken, die zich ten doel stellen gedeelten der abstracte wiskunde onder het bereik te brengen van hen, die een grondigen elementairen cursus achter den rug hebben.

In die richting getuigt ook de „Sammlung Schubert" van een loffelijk streven en het bovengenoemde werk zal, naar we hopen, voor velen een welkome verschijning zijn. Voorwaar, het woord abstract mag toegepast worden op de meerdimensionale meetkunde; toch is het thans niet meer geoorloofd haar met een: „ik ken u niet en wil u niet kennen" voorbij te gaan; daarvoor heeft zij te zeer onzen meetkundigen blik verruimd, daarvoor ook heeft zij te veel invloed geoefend op de twee- en driedimensionale meetkunde. Prof. Schoute's leerboek nu maakt een kennismaking met, zelfs een dieper indringen in dit gebied mogelijk, het brengt in den vorm van een leerboek wat tot nu toe in tijdschriften en wijsgeerig gehouden handboeken moeilijk bereikbaar was, en het geeft, in schijntegenspraak met den aard van het onderwerp, ook toepassingen in den vorm van 335 vraagstukken. Daarenboven heeft de schrijver zijn lezers den dienst gedaan zich te beperken, door niet abstractie op abstractie te stapelen; hij blijft Euklidisch en maakt in dit eerste deel van geen differentiaal- en integraalrekening gebruik.

We geven er thans een overzicht van. Het eerste gedeelte zou met den algemeenen naam verruiming van de grondbeginselen der meetkunde kunnen worden aangeduid; het omvat vier hoofdstukken, waarin de vaststelling der grondbeginselen, de evenwijdigheid, de rechthoekigheid, de afstanden, de hoeken en de projectiën worden behandeld. De behandeling is synthetisch; de lezer wordt door haar losgemaakt van de beperkingen voortvloeiende uit het aannemen van twee of drie afmetingen en is voorbereid voor de studie der volgende hoofdstukken. Een dergelijke voorbereiding is onmisbaar, een enkel voorbeeld moge dit toelichten. Het is bekend dat, als men zich de planimetrie heeft eigen gemaakt, de studie der stereometrie de invoering van nieuwe begrippen eischt en sommige andere wijziging ondergaan. Door een punt eener rechte lijn b.v. kan men in hetzelfde vlak slechts één loodlijn op die rechte trekken, in de ruimte oneindig vele, maar bovendien de loodrechte stand van vlakken, onderling en ten opzichte van

rechte lijnen, treedt geheel nieuw te voorschijn. Zoo wordt het ook hier nóodig te spreken van ruimten loodrecht op rechte lijnen en op elkander, van hoeken van ruimten met elkander, van projectie eener ruimte op een ruimte.

De volgende vijf hoofdstukken toonen op welke wijze verschillende gedeelten der meetkunde zich vervormen, zoodra men meer dan drie afmetingen toelaat. Zij behandelen de beschrijvende, de analytische en de projectieve meetkunde (Geometrie der Lage), de meetkunde van het aantal en de polygonometrie. In elk dezer hoofdstukken treden belangrijke vraagstukken op den voorgrond. We laten er eenige volgen.

Bij de analytische meetkunde de ruimtecoördinaten, meer bepaald de homogene met haar transformatie, benevens de determinant- en matrixvormen; bij de projectieve meetkunde, de perspectiviteit, de incidente ruimten, de affiniteit, congruentie en gelijkvormigheid, de wederkeerigheid, het nulstelsel, de coïncideerende punten; bij de meetkunde van het aantal de beschouwing van het correspondentie-beginsel van Chasles en het beginsel van het behoud van het aantal van Schubert; bij de polygonometrie de beschouwing van den meetkundigen vorm ontstaande door uit een punt n ribben te trekken, die niet in dezelfde ruimte R_{n-1} liggen (n-dimensionales n-kant).

Het eigenaardigste onderdeel is wellicht de beschrijvende meetkunde, omdat daarbij de schijnbare tegenstelling tusschen werkelijkheid en abstractie het scherpst aan het licht komt. Hier wordt, nadat de algemeene n-dimensionale projectie-assen en vlakken behandeld zijn, de projectie in R_4 beschouwd, en vraagstukken worden er aan vastgeknoopt. Maar de aard van het onderwerp vergt hier ook een voorstelling. Daarvoor worden in het platte vlak door het punt O twee loodrecht op elkaar gerichte assen getrokken, die vier halfstralen vormen, die bij de projecteering in R_9 de namen OX_{159}, OX_{26}, OX_{37}, OX_{48} voeren en binnen welke de acht projectiën van een punt P_{12}, P_{23}, P_{34}, P_{45}, P_{56}, P_{67}, P_{78}, P_{89} worden uitgemeten. De toepassing dezer methode op R_4 geeft een bewerking, die van de ideale bewerkingen in R_4 een beeld geeft.

Laatstgenoemde afbeelding voert ten slotte tot een opmerking. Reeds werd medegedeeld, dat de Schrijver een zekere zelfbeperking in acht nam, daarin bestaande, dat hier slechts sprake is van Euklidische meetkunde. Een andere zeer te waardeeren

beperking is, dat hij de wijsgeerige bespiegelingen, die bij dit onderwerp zoo verleidelijk zijn, naliet en zich vergenoegde met een zuiver wiskundig leerboek te schrijven. De vormen der twee- en driedimensionale meetkunde zijn ideaal, en hetgeen wij construeeren als rechte lijn, cirkel of willekeurige kromme zijn niet dan benaderingen, zoo ook hetgeen als model vervaardigd wordt bij de leer der lichamen en oppervlakken. Maar bij de meerdimensionale meetkunde is er nog een andere overgang noodig; haar vormen worden afgeleid uit redeneering, nadat men in de voor ons waarneembare ruimte omtrent de voorstelling zich zekerheid verschaft heeft; er is dus steeds een aanname, door redeneering gevonden, noodig om langs constructieven weg resultaten te verkrijgen en deze resultaten kunnen wel vertolkt worden, maar missen aanschouwelijkheid.

Bij een streng wiskundige behandeling kan men evenwel alle gedachtenwisseling over dit punt ter zijde laten en met den Schrijver zeggen: Es leuchtet ein, wie man auf diese Weise weitergehen kann, jedesmal ein neues Glied der Reihe „Punkt, Linie, Fläche, Raum u. s. w." aus dem vorhergehenden ableitend. So erscheint im allgemeinen das Raumgebilde vom d Dimensionen als der Ort eines sich kontinuierlich bewegenden Raumgebildes von $d - 1$ Dimensionen, was offenbar voraussetzt, dass bei keiner dieser die Zahl der Dimensionen um die Einheit steigernden Operationen der für diese entweder mit oder ohne Deformation statt findende Positionsänderung notwendige Bewegungsraum gefehlt habe. Schliesslich ist, wie wir sehen werden, diese Voraussetzung die einzige durch welche sich die mehrdimensionale Geometrie von der Stereometrie unterscheidet. J. C.

International catalogue of scientific literature. First Annual Issue. A. Mathematics. Price fifteen shillings. Eén deeltje in 8°, XIII + 201 blz. London: Harrison and Sons, St. Martins Lane, 1902.

Deze catalogus komt, zooals men weet, door internationale samenwerking tot stand. Voor ieder land wordt het materiaal bewerkt in een zoogenaamd „Regionaal bureau", waarvan het Nederlandsche te Amsterdam in het Trippenhuis gevestigd is. Voorts ondersteunen de Regeeringen de onderneming door zich

tot het aanschaffen van een zeker aantal exemplaren te verbinden. De Nederlandsche staat deze exemplaren aan verschillende openbare bibliotheken af. Op die wijze zal de catalogus in Nederland volledig aanwezig zijn op de bibliotheek der Kon. Akademie en op die der drie Rijksuniversiteiten. Ook het wiskundig genootschap heeft zich de deeltjes voor wiskunde en mechanica aangeschaft, die dus ook op de Amsterdamsche Universiteitsbibliotheek te vinden zijn.

Het deeltje, dat vóór ons ligt, bevat een groot gedeelte der in 1901 en 1902 verschenen wiskundige literatuur. Echter zijn blijkbaar sommige regionale bureau's nog niet in gereedheid geweest. Zoo ontbreekt de Russische. Belgische, Oostenrijksche en Zwitsersché literatuur. Dit zal in den volgenden jaargang worden ingehaald.

De catalogus bestaat uit twee gedeelten. In de „authors' catalogue" wordt alles alphabetisch naar de namen der schrijvers gerangschikt. Daarop volgt dan de „subject catalogue", welke is ingedeeld naar de onderwerpen volgens een stelsel van classificatie, dat van het in onze Revue gebruikelijke in vele opzichten afwijkt.

Zoo wordt bijv. de meerdimensionale meetkunde niet meer onder één enkel hoofd vereenigd, maar verdeeld over „Topology of space and hyperspace"; „Algebraic configurations in hyperspace" en „Hypergeometric configurations and higher elements of hyperspace".

Over het geheel echter gaat de systematische indeeling veel minder ver dan die van onze Revue. Zij telt 166 afdeelingen, terwijl er in het stelsel onzer Revue, afgezien nog van de onderverdeeling naar Grieksche letters en gerekend voor wiskunde alleen, ruim zesmaal zooveel voorkomen. En van de gelegenheid om in de officieel vastgestelde rubrieken de stof nog verder in te deelen is slechts ééns gebruik gemaakt waar van „Probabilities" het „Insurance and actuarial work" is afgesplitst. Bij andere vakken, Chemie bijv., is deze vrijheid daarentegen op ruime schaal in toepassing gebracht.

Erkend moet worden, dat in het voorhanden deeltje de in ééne afdeeling op elkander volgende artikels niet *te* talrijk zijn om het overzicht te bemoeilijken. Slechts de afdeeling „History and biography" maakt hierop eene uitzondering. Hier ware eene verdere verdeeling der 150 artikelen zeker gewenscht

geweest. En ook bij de voorgenomen verzameltafels voor meerdere jaargangen zal de behoefte aan verdere onderverdeeling zich zeker sterk doen gevoelen.

Ten slotte merken wij nog op, dat in den systematischen catalogus wijziging of uitbreiding der titels, mits duidelijk door haakjes aangewezen, is toegestaan, ten einde op die wijze den werkelijken inhoud beter aan te geven. Niet door alle regionale bureaux is echter hiervan gebruik gemaakt, zoodat men ook dáár nog wel enkele van die titels aantreft, die er meer op berekend schijnen door het opwerpen van een raadsel de nieuwsgierigheid op te wekken dan wel eene duidelijke aanwijzing omtrent den te verwachten inhoud te geven.

D. J. K.

Verzameling van vraagstukken ter oefening in de Beginselen der Mechanica door N C. Grotendorst, Hoogleeraar aan de Kon. Mil. Academie. Breda. De Koninklijke Militaire Academie. 1903.

Deze kleine verzameling omvat een aantal, niet te moeilijke vraagstukken over de Statica, de beweging van een materieel punt en de meest eenvoudige gevallen der beweging van een lichaam van onveranderlijke gedaante; vraagstukken over Cinematica komen daarin niet voor, evenmin als zulke over de iets meer zamengestelde beweging van een lichaam, waarvan één punt vast is. Bijna uitsluitend is de verzameling bestemd om te worden gebruikt bij het onderwijs aan de Koninklijke Militaire Academie; daarbij zal zij waarschijnlijk goede diensten bewijzen. Bij de korte opmerkingen toch, die bij verschillende vraagstukken gevoegd zijn ten einde de oplossing gemakkelijker te maken, wordt steeds verwezen naar het aan die Academie gebruikte leerboek, zelfs vindt men er vragen in als No. 28 op Pg. 34: Los vraagstuk § 230 sub II op door de formules van § 197, die onverstaanbaar zijn voor hem, die dit buiten de Academie minder bekende leerboek niet bij de hand heeft.

Aan bruikbaarheid, ook voor anderen, zou de verzameling hebben gewonnen, wanneer de Schrijver dit verwijzen naar een bepaald leerboek had nagelaten en in plaats daarvan bij verschillende vraagstukken in 't kort had aangegeven, van welke beginselen bij de oplossing met vrucht kon worden gebruik gemaakt.

Z.

Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung, als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen zusammengestellt von Dr. Robert Fricke. Dritte umgearbeitete Auflage. Een deel in 8°, 218 blz.. Brunswijk, Friedrich Vieweg und Sohn, 1902.

De Schrijver, hoogleeraar aan de technische hoogeschool te Brunswijk, bestemde oorspronkelijk dezen leiddraad voor zijne leerlingen. Het boek bevatte een kort overzicht van den hoofdzakelijken inhoud zijner lessen. Deze derde uitgave werd door hem omgewerkt om den leiddraad behalve voor zijne leerlingen ook voor anderen meer bruikbaar te maken. Maar bij deze wijzigingen had de Schrijver steeds de toekomstige beoefenaren der technische wetenschappen op het oog. Hij heeft er daarom naar gestreefd, te veel logische abstractie te vermijden en steeds in de aanschouwing zijn uitgangspunt gezocht. In de tweede plaats is geen noodelooze volledigheid beoogd, slechts die onderwerpen zijn behandeld, die volgens de ervaring van belang zijn voor de verdere studie der techniek. Wij meenen, dat de Schrijver zijn doel heeft bereikt, en dat zijn leiddraad zeer bruikbaar is voor hen, die met de studie der differentiaal- en integraalrekening aanvangen. Intusschen, zooals de titel aangeeft, het boek is een leiddraad bij de beoefening der theorie, uitgewerkte voorbeelden en aanschouwelijke toepassingen moet men er niet in zoeken. Kl.

Istituzioni di analisi algebrica di A. Capelli. Terza edizione con aggiunte delle „Lezioni di algebra complementare". Napoli, B. Pellerano, 1902. Groot octavo, 714 blz., 11 lires.

De derde druk van dit leerboek, waarvan de eerste in 1894 de reeds jaren van te voren verschenen gelithographeerde uitgaaf der akademische lessen van den schrijver in boekvorm het licht deed zien, wijkt in enkele opzichten belangrijk van de beide voorgaanden af. Eerstens door de toevoeging van enkele nieuwe hoofdstukken over de elementen van de theorie der natuurlijke, der negatieve en der gebroken getallen, d.w.z. de eerste grondslagen zoowel van stelkunde als van rekenkunde; met deze toevoeging staat de aan den titel aangebrachte wijziging in verband. Vervolgens door uitbreiding van het hoofdstuk over de beginselen der combinatierekening en die der

nieuwere groepentheorie. Eindelijk door toevoeging van een nieuw hoofdstuk met algemeene beschouwingen omtrent doorloopendheid en differentieerbaarheid van functies en van een aantal nieuwe paragraphen over de theorie der elliptische functies.

Van dit werk, dat tusschen den tekst een groot aantal vraagstukken ter oplossing geeft en over het algemeen kan worden aanbevolen, mag de volgende opsomming der verschillende hoofdstukken den inhoud eenigermate doen kennen.

1. Combinatorische wording der rekenkunde, inleiding tot de rekening met letters.

2. Deelbaarheid en grondeigenschappen der natuurlijke getallen.

3. Gronden der combinatorische analysis.

4. Bewerkingen met rationale getallen.

5. Theorie der determinanten en haar toepassing op de oplossing van stelkundige vraagstukken van den eersten graad.

6. Gronden van de leer der geheel rationale functies.

7. Bewerkingen met bestaanbare getallen.

8. Algemeene beschouwingen over doorloopendheid en differentieerbaarheid van functies van bestaanbare veranderlijken.

9. Algemeene eigenschappen van vergelijkingen met bestaanbare coëfficiënten.

10. Numerische oplossing van vergelijkingen.

11. Bewerkingen met complexe getallen.

12. De wortels van een vergelijking van den n^{den} graad.

13. Algemeene theorie der deelbaarheid en der eliminatie.

14. Transformatie van vergelijkingen. Algemeene oplossing van vergelijkingen der eerste vier graden.

15. Beginselen van de theorie der stelkundige irrationale grootheden.

16. Lineaire transformatie van een stelkundigen vorm. Invarianten en covarianten.

S'.

Elementi di geometria proiettiva, appunti delle lezioni dettate nella R. Università di Napoli dal Prof. F. Amodeo. Seconda edizione accresciuta e migliorata, Napoli, L. Alvano, 1902. Een deel in kwarto, gelithografeerd, 488 blz., 10 lires.

Dit in menig opzicht verdienstelijk, doch typographisch zeker niet zeer fraaie werk is verdeeld in een inleiding, een eerste en een tweede deel. De inleiding handelt over de

grondpostulaten, grondvormen, oneindig verre elementen, grondbewerkingen en over de eenvoudigste gronden van de theorie der projectieve verwantschap, der homologie, der polariteit. In het eerste deel wordt de theorie der projectiviteit van lineaire grondstelsels bestudeerd en wel in het eerste hoofdstuk die der grondvormen met een enkelvoudig oneindig aantal elementen (puntreeks, stralenbundel in het vlak en vlakkenbundel om een as), in het derde hoofdstuk die der grondvormen met een tweevoudig oneindig aantal elementen (puntenveld en stralenbundel in de ruimte), terwijl in het tweede hoofdstuk wordt aangegeven hoe de beschouwing der dubbelpunten van twee projectieve puntreeksen op een zelfde lijn de onbestaanbare elementen in den kring der beschouwingen doet opnemen. In het tweede deel komen de vormen van den tweeden graad aan de orde en worden in een eerste hoofdstuk de projectieve eigenschappen, in een tweede de theorie der polen en poollijnen van een kegelsnee ontwikkeld.

Het geheele werk vereenigt op overzichtelijke wijze de analytische en synthetische behandeling der leerstof met elkaar. S[e].

Gronden der beschrijvende meetkunde van J. Badon Ghyben. Achtste druk, bewerkt door N. C. Grotendorst en J. W. C. Beelenkamp. Tweede deel, tekst en atlas. Breda, 1902.

Het tweede deel van dit werk, waarvan in 1900 het eerste deel verscheen, handelt over gebogen oppervlakken, schaduw en perspectief. Zooals de voorrede van dezen achtsten druk aangeeft, onderscheidt hij zich van den voorgaanden in de volgende onderdeelen. De algemeene beschouwingen over kromme lijnen en gebogen oppervlakken zijn overgebracht naar de hoofdstukken, waarin de verschillende hoofdtypen van oppervlakken worden besproken. De omwentelingshyperboloïde met één blad heeft een plaats gevonden in het hoofdstuk over de omwentelingsoppervlakken. De scheeve oppervlakken van den tweeden graad zijn uitvoeriger behandeld; het hoofdstuk over de axonometrische perspectief is omgewerkt en uitgebreid. De werkstukken zijn vermeerderd met eenige nieuwe opgaven, die bij de examens B aan de Polytechnische School te Delft dienst gedaan hebben.

Het hoofdstuk der gebogen oppervlakken bevat de onderdeelen: de bol, algemeene beschouwingen over kromme lijnen en gebogen oppervlakken, kegel en cylindervlakken, algemeene ontwikkelbare oppervlakken, omwentelingsoppervlakken, scheeve oppervlakken, doorsnijding van gebogen oppervlakken onderling. Het hoofdstuk der schaduwen is alleen in paragrafen onderverdeeld; dat der perspectief bevat een inleiding en beschouwt verder de gewone, de axonometrische, de cavalière perspectief en ten slotte schaduwen in perspectivische teekeningen. Bij het doorbladeren van het met veel zorg bewerkte leerboek is het reeds duidelijk te bespeuren, dat bij de bewerking der leerstof hier en daar naar kortheid is gestreefd en daardoor enkele op zich zelf belangrijke beschouwingen achterwege gebleven zijn. Evenwel, het past ons niet de bewerkers van het aloude leerboek hiervan een verwijt te maken, wijl het voor een bepaalde categorie van leerlingen geschreven is. Daaraan schrijven we het dan ook toe, dat bij den bol verschillende constructies van aan vier enkelvoudige voorwaarden voldoende bollen, bij het ringsoppervlak de in twee cirkels ontaardende doorsnee met een dubbelraakvlak en meer dergelijke bekende punten zijn weggelaten. Toch zouden we de constructie der projectie van een rechten cirkelvormigen kegel met gegeven hellende as en gegeven tophoek, met behulp van een ingeschreven bol, en de beschouwing van het door twee richtlijnen bepaalde ontwikkelbare oppervlak opgenomen wenschen te zien. Doch dit is een kwestie van smaak en daarover valt niet te twisten. Stellen we ons op het standpunt, dat beperking de opneming dezer beide punten verbiedt, dan blijft ons niets anders over dan het boek te prijzen. Wat behandeld is, is duidelijk behandeld en de figuren komen wat keurige uitvoering aangaat die der bekende fransche leerboeken van Leroy en de la Gournerie — met welke ze hier en daar trouwens een innige verwantschap vertoonen — zeer nabij. De in elk geval oorspronkelijke perspectivische teekening van het binnenplein (Fig. 287) der Koninklijke Militaire Academie is een „verlustiging der oogen". S^e^.

J o a n n e s B o l y a i i n m e m o r i a m. Libellus post saeculam, quam Ioannes Bolyai de Bolya anno MDCCCII a.d. XVIII kalendas Januarias Claudiopoli natus est, ad celebrandam memoriam eius immortalem, ex consilio ordinos mathematicorum et

naturae scrutatorum regiae litterarum Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae Claudiopolitanae Editus. Claudiopoli, 1902. Een werk in klein kwarto formaat, xv + 145 blz., met een facsimile van een hongaarschen brief, 3 November 1823 door Johan Bolyai uit Temeswar aan zijn' vader Wolfgang Bolyai geschreven.

Het keurig uitgevoerde werk bevat vier in het latijn gestelde stukken, buiten de door L. SCHLESINGER en J. FARKAS onderteekende voorrede om. Het eerste is de latijnsche vertaling van den boven reeds vermelden brief, waarin een bewijs van het binomium met gebroken exponent geleverd wordt; merkwaardig is hoe de schrijver in het oorspronkelijke, met zorg gereproduceerde stuk zich van latijnsche uitdrukkingen of duitsche woorden bedient, als „quoad exponentes integros positivos", „ab inductione", „Vorzug", „generaliter", „cum rigore", „Ergänzung", „ganz vorzüglich", enz. Deze merkwaardige brief eindigt met de woorden: „Mijn besluit staat vast een werkje over de evenwijdige lijnen het licht te doen zien, zoodra ik wat ik vond geheel geordend zal hebben. Op dit oogenblik is alles nog niet geheel in orde, maar de door mij ingeslagen weg is er mij bijna volkomen borg voor, dat ik het doel, dat ik mij voorstel, indien dit te bereiken is, ook bereiken zal. Ik heb het nog niet geheel uitgewerkt, maar toch reeds wonderschoone dingen gevonden, zoodat ik er van onder den indruk was en het een onovertrefbaar verlies zou achten als ze verloren gingen. Als gij ze gelezen hebt, zult ge dit wel erkennen. Op het oogenblik kan ik alleen zeggen, dat ik uit niets een nieuwe en andere wereld heb geschapen; alles wat ik tot heden zond, is een kaartenhuis in vergelijking met een toren. Ik ben er van overtuigd, dat het mij niet minder tot eer verstrekt dan wanneer ik het reeds geheel voltooid had". Het tweede is een verhandeling van L. SCHLESINGER „over eenige toepassingen van de absolute geometrie op de theorie der funties van een complexe veranderlijke"; het bevat na een korte inleiding beschouwingen over analysis situs, de theorie der transformaties van het vlak in zich zelf, de conforme afbeelding en de oplossing van twee verwante problemen met toepassingen. In het derde geeft P. STÄCKEL een kritisch overzicht van de litteratuur „over dat deel der analytische mechanica, dat op meerdimensionale ruimten slaat". En in het vierde levert R. BONOLA een door een korte inleiding voorafgegane „lijst

van de geschriften die op absolute geometrie betrekking hebben"; van deze lijst bevat het eerste deel der wiskundige verhandelingen 623, het tweede deel der historische, kritische en philosophische verhandelingen 292 nummers en een tabel van personen over de 300 namen. S*.

Joannis Bolyai de Bolya Appendix scientium spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate axiomatis XI. Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem: adiecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica. Editio nova oblata ab Academia Scientiarum Hungarica ad diem natalem centesimum auctoris concelebrandum. Ediderunt JOSEPHUS KÜRSCHÁK, MAURITIUS RÉTHY, BELA TÖTÔSSY DE ZEPETHNEK, academia scientiarum hungaricae sodales. Budapestini, sumptibus academicae scientiarum hungariae, MDCCCCII. Een werk in groot kwarto, 40 blz. met 7 platen.

Dit zoogenaamde „appendix" is het boekje, waarvan in den boven gedeeltelijk aangehaalden brief gesproken werd. Het staat onder dien naam bekend, omdat het (oorspronkelijk in het duitsch) als aanhangsel van het werk „Tentamen juventutem studiosam . . ." zijns vaders in het jaar 1832 verscheen. Hij, die zich thans een oordeel wil vormen over dit „appendix", heeft de keuze uit een groote menigte talen, daar het 1867 in het fransch (Houël), 1873 in het duitsch (Frischauf), 1884 in het engelsch (Halsted), ja zelfs in 1895 in het japansch verscheen. Wie omtrent den schrijver, diens vader en de verhouding van dien laatsten tot Gauss bijzonderheden vernemen wil, leze de in het achtste Heft der *Abh. zur Gesch. der Math.* (supplement van deel 42 van het *Zeitschr. der Math. u. Phys.*) in 1898 verschenen verhandeling van den hoogleeraar Fr. Schmidt uit Budapest en vooral ook L. SCHLESINGER's „Festrede" (*Jahresbericht* der deutschen Math.-Vereinigung, Maart 1903). Aandoenlijk is het te vernemen: Hoe de vader, trotsch op zijn vroegrijpen zoon, in 1807, toen de zoon vijf jaar was, aan Gauss schreef „Es kann die Blüthe fallen ohne Frucht zu lassen. Soll die Hoffnung nicht tauschen, so soll er nach 15 Jahren zu Euch reisen und dein Schüler sein; wenn ich gesund bin dazumal, begleite ich ihn zu Dir." Hoe daarop in 1816 een tweede schrijven volgde, waarin de vader aan Gauss meedeelt, welke bewonderenswaardige vorderingen de toen nog geen veertienjarige knaap ge-

maakt had en hij Gauss verzocht zich met de verdere leiding van den jongen wiskundige te belasten, besluitende met de woorden: „Einige haben gerathen in zu Pasquich (Ofner Astronom) . . . . zu geben; andere haben zum Bugge gerathen in Wien; ich und er verlangen in jeder Rücksicht zu Dir!" Hoe op dezen tweeden brief geen antwoord kwam en de jonge Bolyai dus niet naar Göttingen doch naar de militaire school te Weenen ging en zich daar onder anderen ook door zijn lust tot duelleeren onderscheidde. Hoe de vader in Juni 1831 Gauss een exemplaar van het „appendix" deed toekomen en — toen ook hierop geen antwoord kwam — in Januari 1832 nog een met de toevoeging „mein Sohn hält mehr von Deinem Urtheile als von ganz Europa — und harret allein darauf". Hoe daarop ten slotte, na een stilzwijgen van 32 jaar, in Maart 1832 een schrijven van Gauss over dit werk volgde, dat aldus begon: „Wenn ich damit anfange, dass ich solche nicht loben darf so wirst Du wohl einen Augenblick stutzen: aber ich kann nicht anders; sie loben hiesse mich selbst loben: denn der ganze Inhalt der Schrift, der Weg, den Dein Sohn eingeschlagen hat, und die Resultate, zu denen er geführt ist, kommen fast durchgehends mit meinen eigenen, zum Theil schon seit 30—35 Jahren angestellten Meditationen überein. In der That bin ich dadurch auf dar Aeusserste überrascht. Mein Vorsatz war, von meiner eigenen Arbeit von der übrigens bis jetzt wenig zu Papier gebracht war, bei meinen Lebzeiten gar nichts bekannt werden zu lassen. Die meisten Menschen haben gar nicht den rechten Sinn für das, worauf es dabei ankommt, und ich habe nur wenig Menschen gefunden, die das, was ich Ihnen mittheilte, mit besonderem Interesse aufnehmen. Um das zu können, muss man erst recht lebendig gefühlt haben, was eigentlich fehlt, und darüber sind die meisten Menschen gang unklar. Dagegen war meine Absicht mit der Zeit alles so zu Papier zu bringen, dass es wenigstens mit mir dereinst nicht unterginge. Sehr bin ich also überrascht, dass diese Bemühung mir nun erspart werden kann und höchst erfreulich ist es mir, dass gerade der Sohn meines alten Freundes es ist, der mir auf eine so merkwürdige Art zuvorgekommen ist."

Naar onze meening strekt de uitgaaf van dit „appendix" in het latijn de hongaarsche akademie van wetenschappen tot groote eer. S^r.

INHOUD.

Blz.

L² 10, Q 2. **A. TOXOPEUS.** De confocale kwadratische ruimten in de ruimte van vier afmetingen . . . . 1.

P 1 c, Q 2. **M. J. van UVEN.** De optische afbeelding in de vierde afmeting . . . . 33.

L¹ 17 e, M¹ 6 b γ. **M. J. van UVEN.** Over een door twee kegelsneden bepaalde omhullende. waarvan de ontwondene eener kegelsnee een bijzonder geval is . . . . 38.

D 1 b γ, 6 e. **W. KAPTEYN.** Sur un développement de M. Neumann. 49.

J 2 a. **A. E. RAHUSEN.** Over eene uitbreiding van het theorema van Tchebycheff . . . . 56.

K 8. **C A. CIKOT.** Quadrilatère complet; droite des orthocentres et droite des milieux des diagonales (démonstration s'appuyant sur les seuls livres d'Euclide) . . . . . 62.

K 8. **C. A. CIKOT.** Sur un point remarquable du quadrilatère inscrit . . . . 63.

Bibliographie . . . . 66.

Dr. G. SCHOUTEN. Inleiding tot de studie der elliptische functiën van Weierstrass. Delft, J. Waltman Jr., 1902.

MAURICE GODFFROY. Théorie élémentaire des séries, Parijs, Gauthier-Villars, 1903.

Dr. P H. SCHOUTE Mehrdimensionale Geometrie. Erster Teil. Die linearen Räume. Sammlung Schubert XXXV, Leipzig, G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, 1902.

INTERNATIONAL CATALOGUE OF SCIENTIFIC LITERATURE. First Annual Issue. A. Mathematics. Londen. Harrison and Sons, 1902.

N. C. GROTENDORST. Verzameling van vraagstukken ter oefening in de Beginselen der Mechanica. De Koninklijke Militaire Academie, 1903.

Dr. ROBERT FRICKE. Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung. als Leitfaden zum Gebrauch bei Vorlesungen zusammengestellt. 3te Auflage. Brunswijk, Friedrich Vieweg und Sohn, 1902

A. CAPELLI. Istituzioni di analisi algebrica. Terza edizione con aggiunte delle „Lezioni di algebra complementare", Napoli, B. Pellerano, 1902.

F. AMODEO. Elementi di geometria proiettiva, appunti delle lezioni dettate nella R. Università di Napoli. Seconda edizione accresciuta e migliorata. Napoli, L Alvano, 1902.

N. C. GROTENDORST en J W. C. BEELENKAMP. Gronden der beschrijvende meetkunde van J. Badon Ghyben. 8ste druk. Tweede deel, tekst en atlas. Breda, 1902

Joannes Bolyai in memoriam. Libellus post saeculum, quam Joannes Bolyai de Bolya anno 1902 a.d. 18 kalendas Januarius Claudiopoli natus est, ad celebrandam memoriam eius immortalem, ex consilio ordinos mathematicorum et naturae scrutatorem regiae litterarum Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae Claudiopolitanae editus. Claudiopoli, 1902.

Joannis Bolyai de Bolya Appendix scientiam spatii absolute veram exhibens: a veritate aut falsitate axiomatis 11. Euclidei, a priori haud unquam decidenda, independentem: adiecta ad casum falsitatis quadratura circuli geometrica. Editio nova oblata ab Academia Scientiarum Hungarica ad diem natalem centesimum auctoris concelebrandum. Ediderant JOSEPHUS KÜRSCHÄK, MAURITIUS RÉTHY, BELA TÖTÖSSY DE ZEPETNEK. Budapestini, 1902.

NIEUW ARCHIEF

VOOR

WISKUNDE

UITGEGEVEN DOOR HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP
TE AMSTERDAM

ONDER REDACTIE VAN

J. C. KLUYVER, D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE

TWEEDE REEKS
DEEL VI
TWEEDE STUK

AMSTERDAM
DELSMAN en NOLTHENIUS
[illegible]

T 2 c

SUR UN CAS DE PROPAGATION DE VIBRATIONS SONORES, INFINIMENT PETITES,

PAR

C. KREDIET.
(Rotterdam.)

Comme sujet de prix pour l'année 1903 fut posé le problème suivant:

On demande un examen sur la propagation des vibrations sonores, infiniment petites, dans un gaz, soumis à des forces constantes, ayant un potentiel ϕ (par unité de masse), satisfaisant à l'équation de Laplace.

Les quantités, qui, à l'égard des quotients différentiels de ϕ, sont du deuxième ordre, peuvent être négligées.

Cet article-ci contient la solution couronnée.

Nous supposons d'abord le gaz en équilibre. A un point quelconque (x, y, z) nous indiquons par p_0 la pression, par ρ_0 la densité et nous admettons qu'entre ces deux il existe la relation

$$p_0 = a^2 \rho_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Nous considérerons a^2 comme constante, c'est à dire que nous supposons que la température soit la même dans toute la masse du gaz et que ce gaz suive exactement la loi de Mariotte.

Les conditions d'équilibre sont alors:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial x} &= \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial y} &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial z} &= \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

La formule de Laplace s'écrit

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Nommons k le rapport entre la chaleur spécifique à pression constante et celle à volume constant; alors

$$v_0 = \sqrt{a^2k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

sera la vitesse de propagation du son selon Laplace.

Supposons maintenant que l'on produise des vibrations infiniment petites. Si ρ indique la densité du gaz en (x, y, z) au temps t, nous pouvons poser:

$$\rho = \rho_0(1+\alpha), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

où la compression infiniment petite α est fonction de x, y, z et de t, ρ_0 n'étant fonction que de x, y et z.

La pression p, au même point, sera donnée par

$$p = p_0(1+k\alpha), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

parce que nous devons appliquer la loi de Poisson

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^k.$$

Les équations hydrodynamiques nous donnent les relations:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x}+\dot{u}=\frac{\partial\phi}{\partial x}\\
\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial y}+\dot{v}=\frac{\partial\phi}{\partial y}\\
\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial z}+\dot{w}=\frac{\partial\phi}{\partial z}
\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

si u, v et w sont les composantes de la vitesse de la molécule qui, au moment t, se trouve en (x, y, z).

Comme u, v, w sont des quantités infiniment petites, nous aurons, en négligeant les infiniment petites du deuxième ordre, au lieu de

$$\dot{u}=\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z},$$

la relation plus simple

$$\dot{u}=\frac{\partial u}{\partial t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

De l'équation (6) nous tirons

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p_0}{\partial x}(1 + k\alpha) + p_0 k \frac{\partial \alpha}{\partial x},$$

d'où, en vertu de (5),

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0}\,\frac{\partial p_0}{\partial x}\cdot\frac{1 + k\alpha}{1 + \alpha} + \frac{p_0 k}{\rho_0(1 + \alpha)}\cdot\frac{\partial \alpha}{\partial x}.$$

En négligeant les quantités du deuxième ordre, et ayant égard à (2), il vient

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x}(1 + (k - 1)\alpha) + a^2 k \frac{\partial \alpha}{\partial x} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

En substituant (8) et (9) dans la première des équations (7), nous aurons la première des équations

$$\left.\begin{aligned}
(k - 1)\alpha\frac{\partial \phi}{\partial x} + v^2{}_0\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} &= 0\\
(k - 1)\alpha\frac{\partial \phi}{\partial y} + v^2{}_0\frac{\partial \alpha}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial t} &= 0\\
(k - 1)\alpha\frac{\partial \phi}{\partial z} + v^2{}_0\frac{\partial \alpha}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} &= 0
\end{aligned}\right\} ; \quad . \quad . \quad (10)$$

la deuxième et la troisiéme se trouvent d'une manière analogue.

L'équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \,.\, \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \,.\, \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \,.\, \rho w}{\partial z} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

se simplifie aussi. Nous avons

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_0\frac{\partial \alpha}{\partial t},$$

$$\frac{\partial \,.\, \rho u}{\partial x} = \frac{\partial \rho_0}{\partial x}u + \rho_0\frac{\partial u}{\partial x}, \text{ etc.}$$

Ainsi (11) se change en

$$\rho_0\left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + u\frac{\partial \rho_0}{\partial x} + v\frac{\partial \rho_0}{\partial y} + w\frac{\partial \rho_0}{\partial z} = 0 \quad . \quad (12)$$

Nous tirons de (1)

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial x} = a^2\frac{\partial\rho_0}{\partial x};$$

donc, en vertu de (2), nous avons

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = a^2 \cdot \frac{1}{\rho_0}\frac{\partial\rho_0}{\partial x}.$$

En substituant en (12), celle-ci devient

$$a^2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) + u\frac{\partial\phi}{\partial x} + v\frac{\partial\phi}{\partial y} + w\frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \;. \quad (13)$$

Nous pouvons éliminer u, v et w entre les équations (10) et (13). Différentions 10^a, 10^b, 10^c par rapport à x, y, z et ajoutons les résultats; il vient:

$$(k-1)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) +$$

$$+ (k-1)\alpha\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right) +$$

$$+ v^2{}_0\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2}\right) +$$

$$+ \frac{\partial\,.\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)}{\partial t} = 0 \;.\;.\;.\;.\; (14)$$

Si nous différentions (13) par rapport à t, nous trouvons:

$$\frac{\partial\,.\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)}{\partial t} = -\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} -$$

$$-\frac{k}{v^2{}_0}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right);$$

donc, en vertu des équations (10),

$$\frac{\partial\,.\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)}{\partial t} = -\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2} +$$

$$+\frac{k}{v^2{}_0}\left[(k-1)\alpha\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right) + v^2\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right].$$

Ayant égard à l'équation (3), (14) se réduit à:

$$v_0^2\left(\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\alpha}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}+$$

$$+(2k-1)\left(\frac{\partial\alpha}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\alpha}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\alpha}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+$$

$$+\frac{k(k-1)\alpha}{v_0^2}\left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right)=0. \quad . \quad . \quad (15)$$

Nous voyons que α est la seule fonction inconnue qui entre dans cette relation; ainsi α est déterminée.

Nous remarquons d'abord que, si $\alpha=\alpha_1$ et $\alpha=\alpha_2$ sont des solutions de (15), $\alpha=\alpha_1+\alpha_2$ satisfera aussi. Nous en concluons: *chaque vibration se propagera indépendamment de la présence d'autres.*

Posons

$$\alpha=\psi\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

ψ étant fonction de x, y, z, et non de t. Alors nous avons:

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial t^2}=\psi\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial x}\beta+\psi\frac{\partial\beta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\beta+2\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial x}+\psi\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}, \text{ etc.}$$

En substituant en (15), nous trouvons

$$\psi\left[v_0^2\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\beta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}\right)-\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2}\right]+2v_0^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\beta}{\partial z}\right)+$$

$$+v_0^2\beta\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right)+(2k-1)\left[\psi\left(\frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\beta}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)+\right.$$

$$\left.+\beta\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right]+\frac{k(k-1)\psi\beta}{v_0^2}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right]=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Pour déterminer ψ, nous égalons à zéro les facteurs de $\frac{\partial \beta}{\partial x}, \frac{\partial \beta}{\partial y}, \frac{\partial \beta}{\partial z}$; donc

$$2v_0^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + (2k-1)\psi \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0,$$

$$2v_0^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + (2k-1)\psi \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0,$$

$$2v_0^2 \frac{\partial \psi}{\partial z} + (2k-1)\psi \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0.$$

Comme ψ et ϕ sont toutes les deux des fonctions de x, y, z, nous avons

$$2v_0^2 \frac{d\psi}{\psi} = -(2k-1)\, d\phi$$

et nous pouvons prendre

$$\psi = e^{-\frac{2k-1}{2v_0^2}\phi} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

En vertu de la relation importante (18) l'équation (17) se transforme, après quelques réductions simples, en

$$v_0^2\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\beta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial^2\beta}{\partial t^2} -$$

$$- \frac{\beta}{4v_0^2}\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2\right] = 0 \quad . \quad (19)$$

Les relations (16), (18) et (19) nous donnent la réponse à la question posée.

Si l'on néglige, comme l'indique la question posée, les quantités $\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2$, $\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2$, $\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2$, l'équation (19) ne diffère pas de celle qu'on aurait obtenue en supposant que le gaz ne fût pas soumis aux forces constantes.

Nous concluons:

Avec un certain degré d'approximation, la propagation des ondes sonores dans un gaz homogène, et dans un gaz soumis à des forces constantes (avec potentiel), ne diffèrent que par un changement d'amplitude, indiqué par la formule (18).

Ce changement d'amplitude est indépendant de la vibration qui se propage.

Nous traiterons quelques cas particuliers, parce que nous n'avons pas réussi à résoudre l'équation (19). Nous prendrons, ayant égard à l'atmosphère,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = -g = \text{constante}\,; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0.$$

Alors nous avons

$$\phi = -gx + \text{const.}$$

et (18) se réduit à

$$\psi = Ce^{\frac{2k-1}{2v_0^2}gx} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (20)$$

L'équation (19) devient:

$$v_0^2\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\beta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\beta}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial^2\beta}{\partial t^2} - \frac{g^2\beta}{4_0v^2} = 0 \quad . \quad (21)$$

Posons $s = ax + by + cz$

et $\beta = f(s,\, t)$,

c'est-à-dire examinons la propagation dans un tube, dont la direction fait avec les axes des angles, dont les cosinus sont a, b et c, ce qui donne

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

L'équation (21) se transforme alors en:

$$v_0^2\frac{\partial^2\beta}{\partial s^2} - \frac{\partial^2\beta}{\partial t^2} - \frac{g^2}{4v_0^2}\beta = 0 \quad . \; . \; . \quad (22)$$

Supposons que A soit un infiniment petit. Nous pouvons admettre:

$$\beta = A \cos 2\pi\frac{vt - s}{v\tau} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (23)$$

Il s'en suit:

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial s^2} = -\frac{4\pi^2}{v^2\tau^2} \,.\, A \cos 2\pi\frac{vt - s}{v\tau},$$

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2} = -\frac{4\pi^2}{\tau^2} \,.\, A \cos 2\pi\frac{vt - s}{v\tau}$$

et (22) devient, en divisant par β,

$$-\frac{4\pi^2 v_0^2}{v^2\tau^2}+\frac{4\pi^2}{\tau^2}-\frac{g^2}{4v_0^2}=0,$$

d'où:

$$v^2=\frac{v_0^2}{1-\frac{g^2\tau^2}{16\pi^2 v_0^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

ou bien, avec une approximation très grande

$$v^2=v_0^2+\frac{g^2\tau^2}{16\pi^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24^a)$$

Nous en concluons:

1°. **La vitesse de propagation du son est plus grande que celle qui à été donnée par Laplace.**

2°. **Elle dépend de la période de vibration.**

Pourtant la différence est si faible que nous doutons que l'expérience le démontre un jour.

De plus nous voyons que **malgré la différence en densité il n'y a pas de réflexion contre les couches plus ou moins denses.**

Si B est l'„amplitude" de la compression α à l'origine, elle sera dans un point, dont l'abcisse est x,

$$B'=Be^{\frac{2k-1}{2v_0^2}gx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

Ainsi:

L'amplitude croît avec la hauteur.

Par la compression α l'unité de volume aura une énergie égale à

$$c_v\rho_0(k-1)\alpha T_0 \text{ calories},$$

ou bien

$$p_0\alpha \text{ ergs}.$$

Comme nous avons

$$\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p_0}{\partial x}=\frac{\partial\phi}{\partial x}=-g,$$

nous avons aussi

$$\frac{1}{p_0}\frac{\partial p_0}{\partial x}=-\frac{g}{a^2}=-\frac{gk}{v_0^2};$$

donc :

$$p_0 = Ce^{-\frac{gk}{v_0^2}z},$$

parce que $\frac{\partial p_0}{\partial y}$ et $\frac{\partial p_0}{\partial z}$ sont égales à zéro. L'énergie par unité de volume croît donc suivant l'expression

$$e^{-\frac{gk}{v_0^2}z + \frac{g(2k-1)}{2v_0^2}z},$$

c'est-à-dire suivant :

$$e^{-\frac{gz}{2v_0^2}}.$$

Prenons des nombres. Posons en unités C. G. S. :

$$g = 980,$$
$$v_0 = \tfrac{1}{3} \times 10^5,$$
$$k = 1{,}405,$$
$$\tau = \tfrac{1}{16};$$

alors nous aurons :

$$\left.\begin{array}{l} v = v_0 + 0{,}36 \times 10^{-8} \\ B' = B \times e^{0{,}80 \times 10^{-6} \, . \, z} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (26)$$

Ainsi dans un laps de temps égal à une heure ce son grave parcourt un chemin de 1,3 cM de plus que celui qui résulte de la formule de Laplace. L'amplitude sera doublée à une hauteur de 8,67 KM. Pour les sons moins graves la différence des chemins parcourus est encore plus faible.

Posons $u = s \pm vt$

et $\beta = f(u)$;

alors

$$\frac{\partial^2\beta}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\beta}{\partial s^2}$$

et l'équation (22) devient :

$$(v_0^2 - v^2)\frac{d^2f}{du^2} - \frac{g^2}{4v_0^2}f = 0.$$

Nous en tirons

$$\frac{df}{du} = \sqrt{C - \frac{g^2 f}{4v_0^2(v^2 - v_0^2)}}.$$

Il en résulte que pour $v > v_0$ f est une fonction en sinus (ou cosinus) de u.

Si $v < v_0$, nous aurons

$$\frac{df}{du} = \sqrt{C + h^2 f^2},$$

où

$$h = \frac{g}{2v_0\sqrt{v_0^2 - v^2}}.$$

En résolvant nous aurons:

$$f = Ae^{hu} + Be^{-hu}.$$

Il est clair que β n'est pas une vibration et par conséquent la question exige que h soit imaginaire.

Posons

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

et

$$\beta = f(r, t);$$

alors (22) se transforme en

$$v^2\left(\frac{\partial^2\beta}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\beta}{\partial r}\right) - \frac{\partial^2\beta}{\partial t^2} - \frac{g^2\beta}{4v_0^2} = 0. \quad (27)$$

En remplaçant $r\beta$ par γ nous aurons

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial r^2} = r\frac{\partial^2\beta}{\partial r^2} + 2\frac{\partial\beta}{\partial r}$$

et (27) donne, après multiplication par r,

$$v_0^2\frac{\partial^2\gamma}{\partial r^2} - \frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2} - \frac{g^2\gamma}{4v_0^2} = 0$$

C'est la même équation que (22). Un examen est donc superflu. La vitesse de propagation v (24) est la même dans toutes les directions. Quant à l'amplitude nous avons, si elle est B à une distance 1,

$$B' = B \cdot \frac{1}{r} e^{\frac{2k-1}{2v_0^2}gx}.$$

A notre connaissance, on donne à la propagation des ondes sonores une vitesse commune égale à v_0, quelle que soit la période de vibration. Nous avons démontré dans ces pages qu'il y a de petites différences. Ces différences seraient plus grandes, si la valeur de g était beaucoup plus forte. Alors il y aurait dispersion, quand les ondes sonores seraient réfractées, etc.

M^1 5 k α.

OVER DE MEETKUNDIGE PLAATS DER PUNTEN, VAN WAAR UIT TWEE BEGRENSDE RECHTEN ONDER GELIJKE HOEKEN GEZIEN WORDEN,

DOOR

F. SCHUH.

(Sneek.)

1. In Bd. 45 van *Crelle's Journal* S. 375 geeft J. STEINER aan, dat de meetkundige plaats der punten, van waar uit men twee begrensde rechten in het platte vlak onder gelijke of supplementaire hoeken ziet, uit twee kubische krommen bestaat, waarvan hij de negen snijpunten aangeeft.

Deze zelfde kubische krommen kunnen nog op andere wijze als een meetkundige plaats voor den dag komen, en zijn dan ook op verschillende wijzen, zoowel voor het algemeene als voor bizondere gevallen meermalen onderzocht [1]).

In de volgende bladzijden heb ik langs analytischen weg het een en ander aangaande de gevraagde meetkundige plaats afgeleid, hierbij onderscheid makend tusschen gelijke en supplementaire hoeken; hierbij heb ik meermalen van elementair-meetkundige beschouwingen gebruik gemaakt. Ten slotte heb ik hieraan een stelselmatig onderzoek naar de mogelijke degeneraties van een of beide der kubische krommen toegevoegd, en het bizondere geval, dat beide rechten twee der zijden van een driehoek vormen, iets nader onderzocht.

2. Zijn de gegeven begrensde rechten A_1A_2 en A_3A_4; de hoeken, waaronder men deze van een punt P uit ziet, ϕ_{12} en ϕ_{34}. Hierbij zullen we ϕ_{12} positief noemen, als de draaiing van PA_1 naar PA_2 door den uitspringenden hoek een positieve is.

[1]) Zie o.a. P. H. SCHOUTE, *Crelle's Journal* Bd. 99 S. 98—109.

Anders uitgedrukt: ϕ_{12} is positief, als men van P uit den rechterkant van A_1A_2 ziet; met rechterkant is bedoeld, de kant, die rechts ligt van A_1 naar A_2 ziend. Volgens deze afspraak is er dus onderscheid tusschen A_1A_2 en A_2A_1, terwijl $\phi_{12} = -\phi_{21}$.

Men ziet hieruit direct, dat de gevraagde meetkundige plaats in twee deelen uiteenvalt, één, waarvoor $\phi_{12} = \phi_{34}$, dat we C_1, en een ander, waarvoor $\phi_{12} = \phi_{43}$, dat we C_2 zullen noemen. Nu vervalt echter bij de analytische behandeling het verschil tusschen een voerstraal PA_i en zijn verlengde door P heen, zoodat we niet met halfstralen, maar met volstralen werken; dientengevolge vervalt het onderscheid tusschen gezichtshoeken ϕ en $-(180-\phi)$. Hieruit volgt, dat C_1 uit twee gedeelten bestaat; een *eigenlijk deel*, van waar uit men gelijknamige kanten van A_1A_2 en A_3A_4 onder denzelfden hoek ziet, en een *oneigentlijk deel*, van waar uit men ongelijknamige kanten van A_1A_2 en A_3A_4 ziet onder hoeken, die elkaars supplement zijn. (Alles, wat van C_1 gezegd wordt, geldt met verwisseling der indices 3 en 4 ook voor C_2). Het eigentlijke en het oneigentlijke deel hangen samen in de punten A_1, A_2, A_3 en A_4, die op C_1 gelegen zijn, daar voor A_1 b.v. ϕ_{12} onbepaald is.

Uit $\phi_{12} = \phi_{34}$ volgt

$$\phi_{12} + \phi_{23} = \phi_{23} + \phi_{34}$$

of

$$\phi_{13} = \phi_{24}$$

zoodat de meetkundige plaats, van waar uit men onder de gemaakte afspraak A_{12} en A_{34} onder denzelfden hoek ziet, tevens de meetkundige plaats is voor A_{13} en A_{24}. In het geheel krijgt men dus uit de punten A_1, A_2, A_3 en A_4 drie meetkundige plaatsen, t.w.

1ste C_1, van waar uit men A_1A_2 en A_3A_4 en tevens A_1A_3 en A_2A_4,

2de C_2, van waar uit men A_1A_2 en A_4A_3 en tevens A_1A_4 en A_2A_3,

3de C_3, van waar uit men A_1A_3 en A_4A_2 en tevens A_1A_4 en A_3A_2 onder gelijke hoeken ziet.

Letten we niet op het teeken van den gezichtshoek, maar beschouwt men halfstralen, dan bestaat dus de gezochte meetkundige plaats uit de eigentlijke gedeelten van C_1 en C_2.

3. Om de vergelijking van C_1 op te maken, zullen we PA_i als een volstraal beschouwen, en onder ψ_{12} den hoek verstaan, dien PA_1 in positieven zin gedraaid moet worden, om met PA_2 samen te vallen. Zijn x_i en y_i de rechthoekige coördinaten van A_i en is m_i de richtingscoefficient van PA_i, dan is,

$$tg\psi_{12} = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2},$$

terwijl b.v.

$$m_1 = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

is, zoodat men heeft

$$tg\psi_{12} = \frac{(y - y_1)(x - x_2) - (y - y_2)(x - x_1)}{(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2)},$$

terwijl men $tg\psi_{34}$ door letterverwisseling vindt. De vergelijking van C_1 is dus:

$$\frac{(y - y_1)(x - x_2) - (y - y_2)(x - x_1)}{(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2)} = \frac{(y - y_3)(x - x_4) - (y - y_4)(x - x_3)}{(x - x_3)(x - x_4) + (y - y_3)(y - y_4)}.$$

Uitgewerkt geeft dit een vergelijking van den 3[den] graad, waarvan de kubische termen zijn:

$$(x^2 + y^2)\{y(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) - x(y_1 - y_2 - y_3 + y_4)\}.$$

Dus is C_1 een kubische kromme, gaande door de imaginaire cirkelpunten, dus met één bestaanbare asymptoot. De richting dier asymptoot is uit de kubische termen gemakkelijk af te leiden. Trekt men n.l. door A_1 een lijn A_1A_4' gelijk en evenwijdig aan A_3A_4, dan is A_2A_4' de asymptotenrichting. Ook meetkundig is dit niet moeilijk in te zien.

4. Noemt men B_1, B_2 en B_3 de diagonaalpunten van den volledigen vierhoek $A_1A_2A_3A_4$, en wel zoo, dat B_1 het snijpunt is van A_1A_4 en A_2A_3, B_2 het snijpunt van A_1A_3 en A_2A_4 en B_3 van A_1A_2 en A_3A_4. Meetkundig ziet men direct, dat C_1 door B_2 en B_3 gaat, maar niet door B_1. Verder gaat C_1 door de vier punten A_1, A_2, A_3 en A_4, in welke punten ook de raaklijn gemakkelijk te construeeren is; de raaklijn in A_1 b.v. ligt met A_1A_4 symmetrisch ten opzichte van de deellijn van hoek $A_2A_1A_3$.

Op de zes zijden van den volledigen vierhoek $A_1A_2A_3A_4$ zijn nu de drie snijpunten met C_1 bekend, behalve op A_1A_4 en A_2A_3, waarop we er nog slechts twee kennen. Het derde snijpunt D_{14} op A_1A_4 en D_{23} op A_2A_3 is echter gemakkelijk te construeeren, als men bedenkt, dat $D_{14}A_2$ en $D_{14}A_3$ denzelfden hoek met A_1A_4 moeten maken, zoodat men D_{14} vindt door A_2 te spiegelen ten opzichte van A_1A_4, en A_3 met dit spiegelbeeld te verbinden, welke verbindingslijn A_1A_4 in D_{14} snijdt. Op overeenkomstige wijze vindt men D_{23} (zie fig. 1).

5. Voor de bestaanbare asymptoot zelf kan men ook langs meetkundigen weg een constructie afleiden. Zijn E en F de middens van A_1A_2 en A_3A_4, terwijl G_1 en H_1 de nog onbekende snijpunten van A_1A_2 en A_3A_4 met de asymptoot van C_1 zijn, die hoeken α_1 en β_1 met A_1A_2 en A_3A_4 maakt. Voor een punt P van de asymptoot is:

$$PA_1 \,.\, PA_2 \,.\, \sin \phi_{12} = A_1A_2 \,.\, PG_1 \,.\, \sin \alpha_1,$$
$$PA_3 \,.\, PA_4 \,.\, \sin \phi_{34} = A_3A_4 \,.\, PH_1 \,.\, \sin \beta_1.$$

Met behoud van oneindig groote en eindige termen, kan men bij benadering hiervoor schrijven, als P ver weg ligt:

$$PE^2 \,.\, \sin \phi_{12} = A_1A_2 \,.\, PG_1 \,.\, \sin \alpha_1 \,,$$
$$PF^2 \,.\, \sin \phi_{34} = A_3A_4 \,.\, PH_1 \,.\, \sin \beta_1.$$

Door deeling vindt men, als men bedenkt, dat $\sin \phi_{12} = \sin \phi_{34}$ en $A_1A_2 \,.\, \sin \alpha_1 = A_3A_4 \sin \beta_1$ is,

$$\frac{PE^2}{PF^2} = \frac{PG_1}{PH_1}.$$

Zijn E_1 en F_1 de projecties van E en F op de asymptoot van C_1, dan is ook

$$\frac{PE_1^2}{PF_1^2} = \frac{PG_1}{PH_1}.$$

Nu is $PE_1 = PF_1 + F_1E_1$ en $PG_1 = PH_1 + H_1G_1$, zoodat men verkrijgt:

$$1 + \frac{2 \,.\, F_1E_1}{PF_1} + \frac{F_1E_1^2}{PF_1^2} = 1 + \frac{H_1G_1}{PH_1},$$

waaruit volgt:

$$H_1G_1 = 2\, F_1E_1 \,,$$

waarbij men onderscheid moet maken tusschen H_1G_1 en G_1H_1 als ook tusschen F_1E_1 en E_1F_1. Uit deze laatste vergelijking

leidt men de volgende constructie voor de asymptoot af, nadat haar richting reeds geconstrueerd is (fig. 1).

Op A_1A_2 en A_3A_4 bepaalt men de punten K en L zoo, dat $R_3A_1 = A_2K$ en $B_3A_3 = A_4L$ (dus $KL = 2$ EF) is. Door L

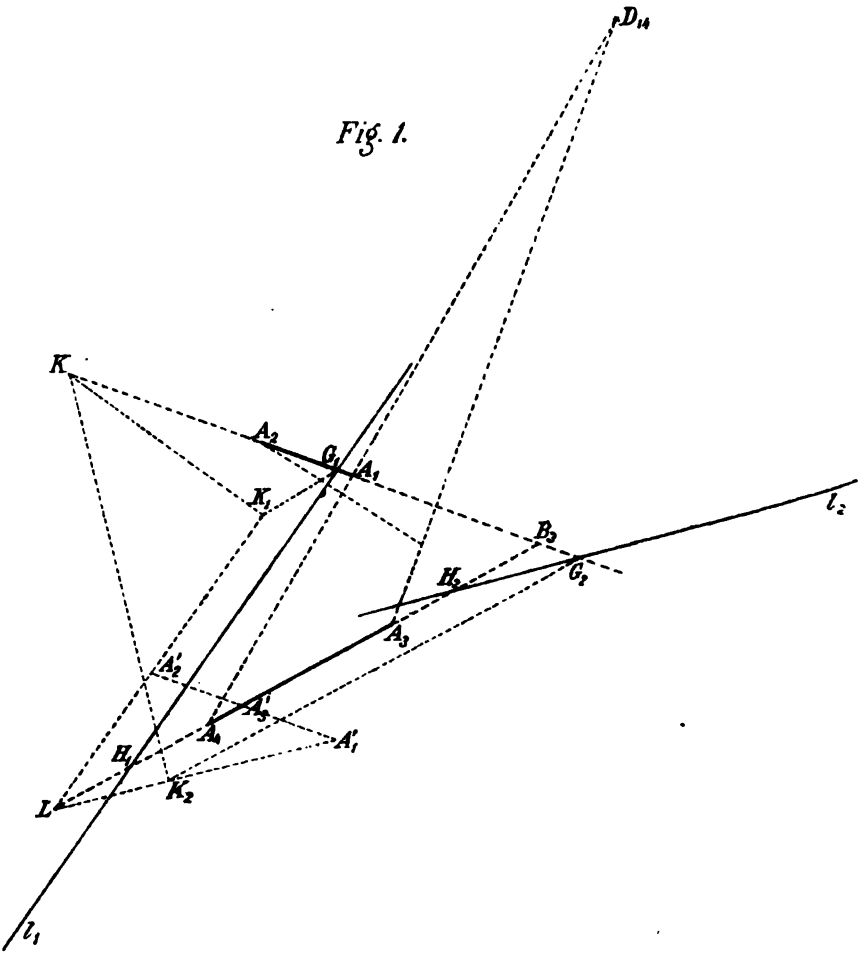


Fig. 1.

trekt men een rechte evenwijdig aan de asymptoot van C_1, terwijl K zich hierop projecteert in K_1 (zoodat $LK_1 = 2\ F_1E_1 = H_1G_1$ is). Trekt men nu door K_1 een rechte evenwijdig aan A_3A_4, dan snijdt deze A_1A_2 in G_1, een punt der gezochte asymptoot.

6. Daar van uit het reëele punt in het oneindige van C_1 de de hoeken ϕ_{12} en ϕ_{34} nul zijn, en dus niet elkaars supplement, ligt dit punt in het oneindige op het eigentlijke deel van C_1; ditzelfde is het geval met de punten B_2 en B_3. Bij het passeeren van een der punten A_1, A_2, A_3 of A_4 komt men op het oneigentlijke gedeelte.

Dezelfde beschouwingen, met verwisseling der indices 3 en 4 gelden ook voor C_2. Zoo gaat C_2 door de punten A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_3, D_{13} en D_{24}. In A_1 en A_2 liggen de raaklijnen aan C_1 en C_2 symmetrisch ten opzichte van A_1A_2, en in A_3 en A_4 symmetrisch ten opzichte van A_3A_4. Verder is het niet moeilijk te bewijzen, dat de raaklijnen in B_3 aan C_1 en C_2 harmonisch liggen ten opzichte van A_1A_2 en A_3A_4.

De twee krommen C_1 en C_2 snijden elkaar in 9 punten, t.w. de twee imaginaire cirkelpunten, A_1, A_2, A_3, A_4, B_3 en de twee snijpunten der cirkels, die A_1A_2 en A_3A_4 tot middellijn hebben. Immers van uit de twee laatstgenoemde punten zijn beide gezichtshoeken 90° en dus zoowel gelijk als elkaars supplement; ze liggen dus op het eigentlijke deel van C_1 en op het oneigentlijke van C_2 of omgekeerd.

7. In figuur 1 zijn de asymptoten l_1 en l_2 van C_1 en C_2 geconstrueerd, benevens het punt D_{14}. De asymptotenrichtingen LA_1' en LA_2' zijn gevonden, door $LA_3' = A_4A_3$, $A_3'A_1' = A_2A_1$ en $A_3'A_2' = A_1A_2$ te maken.

In figuur 2 zijn de krommen C_1 en C_2 geteekend, terwijl de eigentlijke deelen zwaarder getrokken zijn dan de oneigentlijke. Geconstrueerd zijn op de aangegeven wijze de beide asymptoten, de raaklijnen in A_1, A_2, A_3 en A_4, de punten D_{14}, D_{23}, D_{13} en D_{24}, en de snijpunten van C_1 en C_2. Bovendien zijn nog een aantal punten op de volgende wijze geconstrueerd. Op de middens E en F van A_1A_2 en A_3A_4 richt men loodlijnen op; op de loodlijn door E zet men van af E eenige malen het stuk EA_1 af, en trekt met de zoo verkregen punten als middelpunten cirkels door A_1 en A_2 gaande; evenzoo doet men voor de loodlijn door F. Snijpunten van bijeenbehoorende cirkels geven nu punten van C_1 of C_2 aan.

Degeneraties.

8. Daar C_1 en C_2 door de imaginaire cirkelpunten gaan, zijn

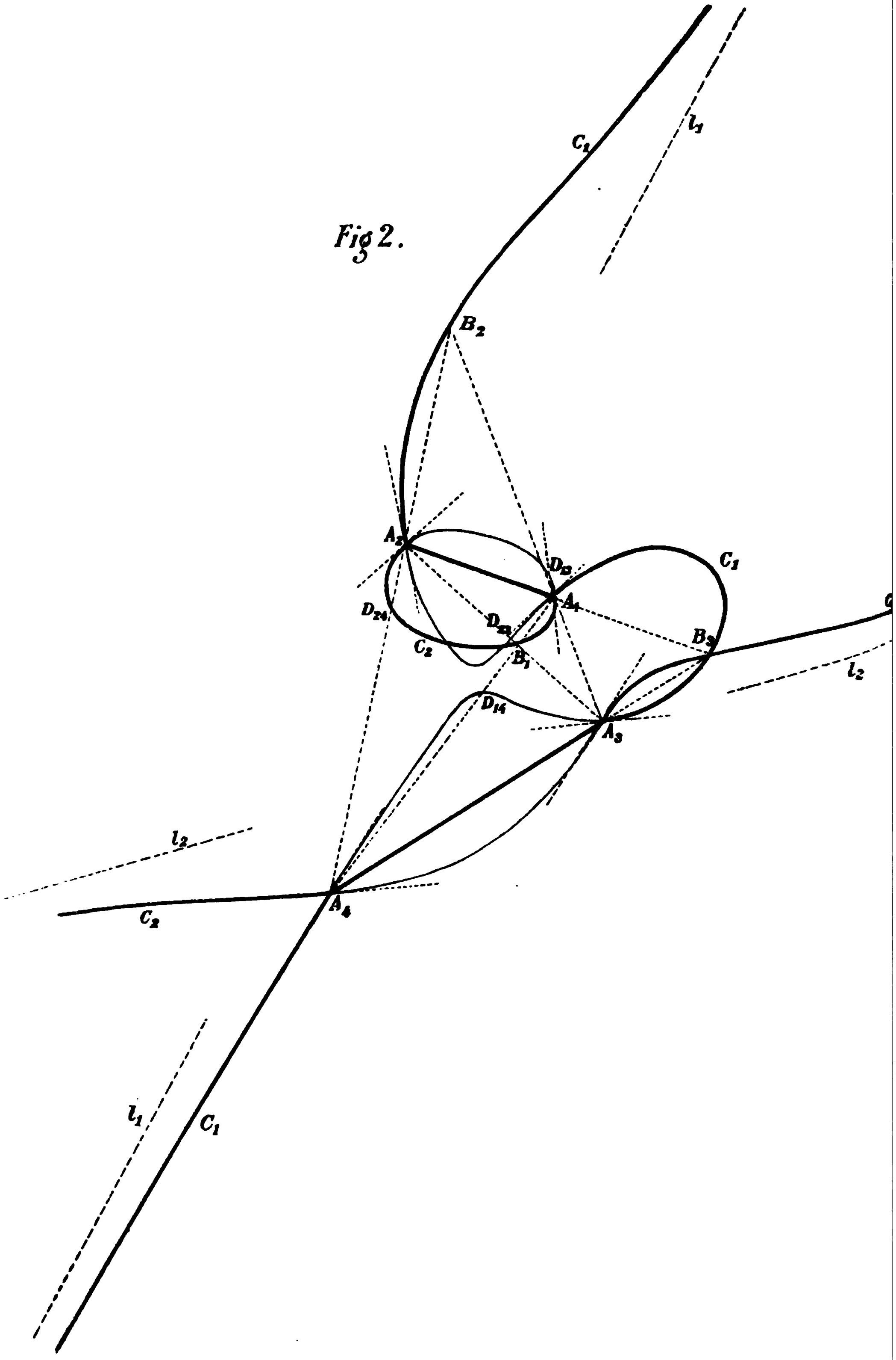


Fig 2.
C_1
l_1
B_2
A_2
D_{12}
C_1
A_1
D_{24}
D_{23}
C_2
B_1
B_3
l_2
D_{14}
A_3
l_2
A_4
C_2
l_1
C_1

er twee degeneraties mogelijk, n.l. in de lijn in het oneindige en een kegelsnede, of in een rechte en een cirkel.

Degeneratie in de lijn in het oneindige en een kegelsnede. Dit geval doet zich voor C_1 voor als A_1A_2 en A_3A_4 gelijk, evenwijdig en gelijkgericht zijn. Men vindt nu, dat de kegelsnede een gelijkzijdige hyperbool is, gaande door A_1, A_2, A_3 en A_4, waarvan het middelpunt het snijpunt der diagonalen van parallelogram $A_1A_2A_4A_3$ is, terwijl de asymptoten de beide bisectricen zijn van den hoek tusschen de lijnen, die de middens van de overstaande zijden van parallelogram $A_1A_2A_4A_3$ verbinden. Nemen we toch het snijpunt der diagonalen als oorsprong en een lijn evenwijdig aan A_1A_2 als X-as van een rechthoekig coördinatenstelsel, dan wordt de vergelijking der kegelsnede (bedenkende dat $y_2 = -y_3 = -y_4 = y_1$, $x_3 = -x_1$ en $x_4 = -x_2$)

$$y_1 (y^2 - x^2) + yx (x_1 + x_2) - y_1 (x_1 x_2 + y_1^2) = 0$$

waaruit het beweerde gemakkelijk is af te leiden.

De gelijkzijdige hyperbool degenereert als $y_1 (x_1 x_2 + y_1^2) = 0$, dus als òf $y_1 = 0$, dus A_1A_2 en A_3A_4 langs dezelfde rechte vallen, in welk geval de hyperbool degenereert in die rechte en de rechte, die A_1A_4 loodrecht middendoor deelt; òf $x_1x_2 + y_1^2 = 0$, hetgeen beteekent dat het parallelogram $A_1A_2A_4A_3$ een ruit is; de hyperbool degenereert nu in de diagonalen van dezen ruit.

In het behandelde geval degenereert C_2 niet; de asymptoot van C_2 loopt evenwijdig aan A_1A_2 en A_3A_4 op gelijke afstanden.

9. *Degeneratie in een rechte en een cirkel.* Gaat de cirkel door A_1 en A_2, dan gaat hij ook door A_3 en A_4 en omgekeerd; immers de hoek waaronder men uit punten van dien cirkel A_1A_2 en dus ook A_3A_4 ziet is constant, m. a. w. ook A_3A_4 is een koorde van dien cirkel. Op dezelfde wijze toont men aan, dat als de rechte (die toch een bizonder geval van een cirkel is) door A_1 en A_2 gaat, deze ook door A_3 en A_4 gaat en omgekeerd. We krijgen dus de volgende vier gevallen:

1ste. De cirkel gaat door A_1, A_2, A_3 en A_4. Wil men A_1A_2 en A_3A_4 van uit den cirkel onder gelijke hoeken zien, dan is daarvoor noodig dat $A_1A_2 = A_3A_4$ en bovendien dat de bogen A_1A_2 en A_3A_4 (met den boog is bedoeld de boog, die kleiner is dan 180°) in denzelfden zin doorloopen worden, dus dat $A_1A_3 = A_2A_4$, zoodat A_1, A_2, A_3 en A_4 een gelijkbeenig

trapezium vormen, waarvan A_1A_4 en A_2A_3 de evenwijdige zijden zijn. C_1 degenereert nu in den omgeschreven cirkel $A_1A_2A_3A_4$ en de rechte B_2B_3, die A_1A_4 en A_2A_3 loodrecht middendoor deelt. C_2 degenereert nu niet, behalve als A_1A_2 en A_3A_4 twee overstaande zijden of de diagonalen van een rechthoek zijn.

2de. De cirkel gaat door A_2 en A_4, de rechte door A_1 en A_3. Zij P een willekeurig punt van deze rechte, dan moeten de hoeken A_1PA_2 en A_1PA_4 gelijk zijn, waaruit volgt, dat A_2 en A_4 samenvallen. Men vindt nu gemakkelijk, dat de cirkel degenereert in de beide isotrope lijnen door A_2. Meetkundig ziet men dit ook hieraan, dat deze cirkel geen bestaanbare punten in de nabijheid van A_2 heeft, zoodat A_2 een geisoleerd punt der kromme C_1 is. C_2 degenereert nu in het algemeen niet; de gedaante van C_2 zullen we later onderzoeken.

3de. De cirkel gaat door A_2 en A_3, de rechte door A_1 en A_4. Voor ieder punt P der rechte zijn weer de hoeken A_1PA_2 en A_1PA_3 gelijk, maar nu liggen A_2 en A_3 aan verschillenden kant van A_1A_4, zoodat A_2 en A_3 elkaars spiegelbeeld zijn ten opzichte van A_1A_4; m. a. w. A_2A_3 wordt loodrecht middendoor gedeeld door A_1A_4. C_1 degenereert nu in de rechte A_1A_4 en den cirkel door A_2, A_3, B_2 en B_3, welke cirkel zijn middelpunt op A_1A_4 heeft, zoodanig dat A_4 de inversie is van A_1 ten opzichte van dien cirkel. De kromme C_2 degenereert nu niet.

4de. De rechte gaat door A_1, A_2, A_3 en A_4. We kunnen deze rechte als X-as kiezen, waardoor $y_1 = y_2 = y_3 = y_4 = 0$ wordt. De vergelijking van C_1 wordt nu:

$$\frac{y\,(x_1 - x_2)}{(x - x_1)(x - x_2) + y^2} = \frac{y\,(x_3 - x_4)}{(x - x_3)(x - x_4) + y^2}$$

of

$$y\{(x_1-x_2-x_3+x_4)(x^2+y^2)-2x(x_1x_4-x_2x_3)+x_3x_4(x_1-x_2)-x_1x_2(x_3-x_4)\}=0$$

zoodat C_1 bestaat uit de X-as en een cirkel. Deze cirkel degenereert in een rechte en de lijn in het oneindige, als $x_1 - x_2 = x_3 - x_4$, dus als A_1A_2 en A_3A_4 gelijk en gelijk gericht zijn. De cirkel degenereert nu in de rechte, die A_1A_4 loodrecht halveert, en de lijn in het oneindige. (De cirkel van C_2 degeneert nu niet, maar is onbestaanbaar).

Doet dit geval zich niet voor, dan kunnen we het middelpunt van den cirkel, dat op de X-as gelegen is, tot oorsprong

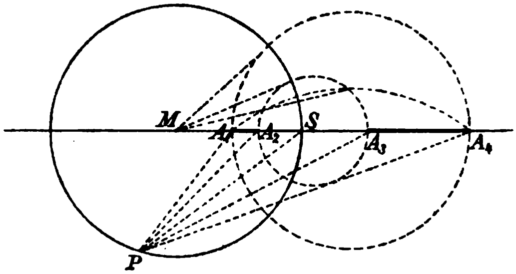
kiezen. Dan wordt $x_1 x_4 = x_2 x_3$ en dus de vergelijking van den cirkel:

$$x^2 + y^2 = x_1 x_4 = x_2 x_3.$$

Dit is de cirkel, die de cirkels op A_1A_4 en A_2A_3 als middellijn loodrecht snijdt (deze laatsten zullen we de cirkels A_1A_4 en A_2A_3 noemen). Het middelpunt M van den orthogonalen cirkel vindt men door een cirkel te trekken door A_1 en A_4, die den cirkel A_2A_3 in twee punten snijdt, wier verbindingslijn A_1A_4 in M snijdt; de raaklijnen uit M aan de cirkels A_1A_4 en A_2A_3 geven den straal van den orthogonalen cirkel aan (fig. 3).

De cirkel M is bestaanbaar, als de cirkels A_1A_4 en A_2A_3 elkaar niet snijden, dus als A_1A_4 en A_2A_3 geheel binnen of geheel buiten elkaar liggen. In het eerste geval zijn A_1A_2 en A_3A_4 gelijkgericht, zonder binnen elkaar te vallen; de cirkel M behoort nu tot het eigentlijke deel van C_1. Liggen A_1A_4 en A_2A_3 buiten elkaar, dan zijn A_1A_2 en A_3A_4 tegengesteld gericht,

Fig. 3.



maar liggen niet buiten elkaar; de cirkel hoort nu tot het oneigentlijke deel van C_1. We vinden dus, dat als A_1A_2 en A_3A_4 gelijkgericht zijn, C_1 bestaanbaar is en C_2 onbestaanbaar als A_1A_2 en A_3A_4 buiten elkaar vallen; C_1 onbestaanbaar en C_2 bestaanbaar als A_1A_2 en A_3A_4 binnen elkaar vallen, en anders C_1 en C_2 beide bestaanbaar zijn.

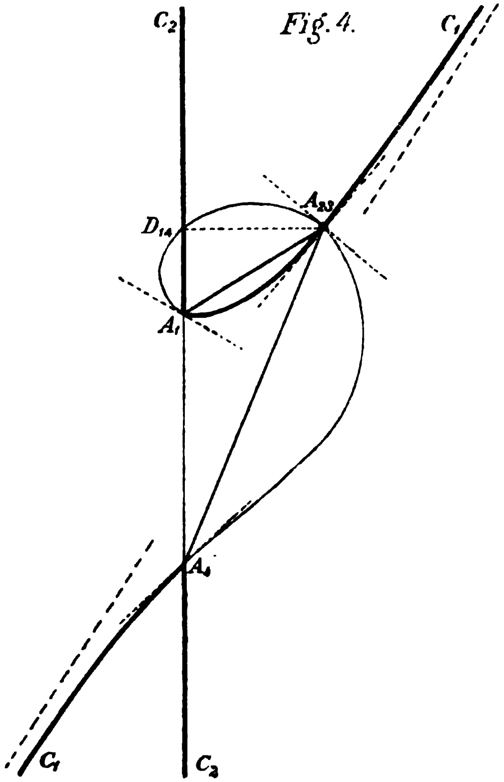
Vallen de punten A_1 en A_3 (of A_2 en A_4) samen, dan degenereert de cirkel in de beide isotrope lijnen door A_1 (of A_2). Vallen echter A_1 en A_4 (of A_2 en A_3) samen, dan gebeurt er niets bizonders; de cirkel gaat nu door A_1 (of A_2), en snijdt den cirkel A_2A_3 (of A_1A_4) loodrecht.

Ook meetkundig ziet men direkt, dat men van uit een punt

P van den orthogonalen cirkel A_1A_2 en A_3A_4 onder denzelfden hoek ziet (fig. 3). Immers A_1 en A_4 liggen invers ten opzichte van den orthogonalen cirkel, waaruit volgt, dat PS de bisectric van den hoek A_1PA_4 is; om dezelfde reden is PS ook de bisectrice van den hoek A_2PA_3, waaruit de gelijkheid der hoeken A_1PA_2 en A_3PA_4 volgt.

10. We zullen nu het reeds vermelde geval, dat de beide be-

Fig. 4.



grensde rechten de zijden van een driehoek vormen, iets nader onderzoeken. Vallen A_2 en A_3 samen, welk punt we A_{23} zullen noemen, en nemen we dit als oorsprong, dan wordt de vergelijking van C_1

$$\frac{-y_1x+x_1y}{(x-x_1)x+(y-y_1)y}=\frac{-yx_4+xy_4}{x(x-x_4)+y(y-y_4)}$$

of

$$(x^2+y^2)\{y(x_1+x_4)-x(y_1+y_4)\}+(x^2-y^2)(x_4y_1+x_1y_4)+2xy(y_1y_4-x_1x_4)=0$$

C_1 heeft dus in A_{23} een dubbelpunt; de raaklijnen in het dubbelpunt zijn de beide bisectricen van den hoek $A_1A_{23}A_4$, zooals meetkundig ook direct is in te zien; de tak, die aan de bisectrice van den hoek $A_1A_{23}A_4$ zelf raakt, behoort tot het eigenlijke deel; de tak, die aan de bisectrice van het supplement van $A_1A_{23}A_4$ raakt, tot het oneigentlijke deel van C_1. De raaklijnen in A_1 en A_4 aan C_1 vindt men, door A_1A_4 te spiegelen ten opzichte van A_1A_{23} en A_4A_{23}. Het derde snpunt D_{14} van de rechte A_1A_4 met C_1 is nu het voetpunt van de hoogtelijn door A_{23}. De asymptoot loopt evenwijdig aan de zwaartelijn door A_{23}. Men vindt de asymptoot door uit A_1 een loodlijn neer te laten op de lijn door A_4 evenwijdig aan genoemde zwaartelijn; door het voetpunt dier loodlijn trekt men een lijn evenwijdig aan $A_{23}A_4$, welke lijn A_1A_{23} in een punt der asymptoot snijdt. Is $A_1A_{23} < A_{23}A_4$, dan ligt A_1 op de lus der kromme (D_{14} ligt steeds op de lus). Is $A_1A_{23} = A_{23}A_4$, dan degenereert C_1 in de zwaartelijn door A_{23} en den omgeschreven cirkel van driehoek $A_1A_{23}A_4$.

In fig. 4 zijn C_1 en C_2 geteekend. Behalve de aangegeven punten en raaklijnen, zijn van C_1 meerdere punten op de reeds vroeger aangegeven wijze geconstrueerd. De eigentlijke deelen zijn weer zwaarder geteekend dan de oneigentlijke. C_2 bestaat uit de rechte A_1A_4 en het geisoleerde punt A_{23}.

R 8 c γ, H 2 c γ

DIE ROLLENDE BEWEGUNG EINES BELIEBIGEN SCHWEREN UMDREHUNGSKÖRPERS UEBER EINE HORIZONTALE EBENE. AUSZUG AUS DER INAUGURAL-DISSERTATION [1],

VON

J. H. M. FALKENHAGEN.
(Gorinchem.)

Voraussetzungen und Bezeichnungen.

1. Zweck der im Titel erwähnten Schrift ist, die verschiedenen möglichen Arten der Bewegung eines schweren Umdrehungskörpers über eine horizontale Ebene zu discutiren falls seine Meridiancurve nicht durch eine bestimmte analytische

Fig 1.

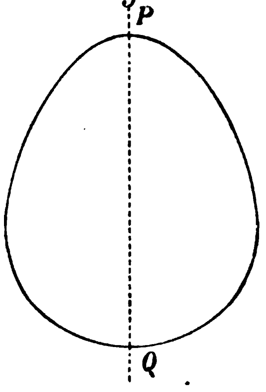
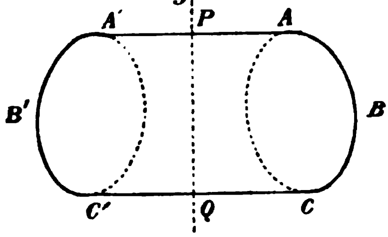


Fig. 2



Gleichung gegeben ist, sondern über ihre Gestalt nur einige sehr allgemein gehaltene Voraussetzungen vorliegen.

[1] Für Beweise und nähere Auseinandersetzungen, sowie für die Litteratur des betreffenden Gegenstandes wird nach der ursprünglichen Schrift verwiesen, welche unter folgendem Titel erschien: De rollende beweging van een omwentelingslichaam over een horizontaal vlak onder de werking der zwaartekracht. Gorinchem, F. Duym, 1903.

Wir unterscheiden dabei sofort zwei verschiedene Fälle, welche durch die Figuren 1 und 2 dargestellt werden.

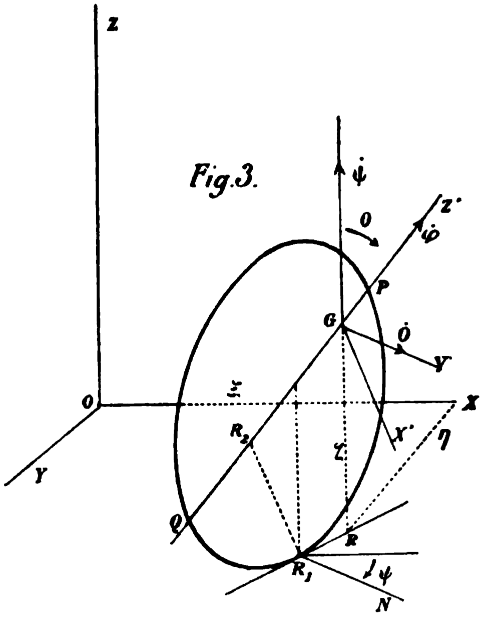
Für beide Fälle nehmen wir an:

1° dass der wirksame Theil [1]) der Meridiancurve überall concav gegen die Umdrehungsaxe PQ gekrümmt ist;

2° dass in jedem Punkte dieses Theiles, mit Inbegriff der beiden Polen P und Q der Fig. 1, die Tangente und der Krümmungsradius eindeutig bestimmt sind;

3° dass der Krümmungsradius nur an vereinzelten Stellen unendlich gross werden.

2. In Fig. 3 haben wir eine beliebige Lage des Umdrehungskörpers im Falle der Fig. 1 dargestellt. Dabei ist R_1 der augenblickliche Rotationspol, PR_1Q die diesen Pol enthaltende



Meridiancurve, PQ die geometrische Axe, O, XYZ ein festes rechtwinkliges Coordinatensystem, G der in Hinsicht auf diesem Systeme durch die Coordinaten ξ, η und ζ definirte Schwerpunkt des Körpers, G, $X'Y'Z'$ ein zweites bewegliches

[1]) In Fig. 1 erstreckt sich dieser Theil über den ganzen Umfang der Meridiancurve; beim ringförmigen Umdrehungskörper der Fig. 2 beschränkt er sich dahingegen auf die Curvenstücke CBA und C'B'A'.

Coordinatensystem, dessen Y'-Axe immer senkrecht bleibt zur Meridianebene des Rotationspoles.

Wir bezeichnen weiter mit θ den Winkel zwischen OZ und GZ', gemessen in dem in der Figur angegebenen Sinne; mit ψ den Winkel zwischen GY', oder R_1N, und OX; mit ϕ den Winkel zwischen der Ebene PR_1Q und einer beliebigen, aber gegebenen, Meridianebene des Umdrehungskörpers.

Die *Lage* dieses Körpers ist dann durch die Coordinaten ξ, η, θ, ψ und ϕ vollkommen bestimmt, weil nämlich ζ, wenn die Meridiancurve einmal gegeben ist, als eine vollkommen bestimmte Function von θ betrachtet werden muss, die wir im Folgenden häufig durch:

$$\Theta_1 = GR = \zeta \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

darstellen werden.

Ausser dieser Function Θ_1 giebt es aber noch einige andere, die eine einfache geometrische Deutung zulassen und im Weiteren eine gewisse Rolle spielen werden.

Sie sind folgende:

$$\Theta_2 = \Theta_1 \sin\theta + \Theta'_1 \cos\theta = R_2R_1; \quad \ldots \quad (2)$$

(R_2R_1 immer positiv zu nehmen);

$$\Theta_3 = \Theta_1 \cos\theta - \Theta'_1 \sin\theta = R_2G; \quad \ldots \quad (3)$$

(R_2G positiv zu nehmen, wenn diese Strecke gleichgerichtet ist mit GZ');

$$\Theta_4 = \Theta_1 + \Theta''_1 = \frac{\Theta'_2}{\cos\theta} = -\frac{\Theta'_3}{\sin\theta} = \quad \ldots \quad (4)$$

= Krümmungsradius der Meridiancurve; (und immer positiv);

ausserdem ist:

$$\Theta'_1 = \frac{d\Theta_1}{d\theta} = -R_1R\,[1]; \quad \ldots \ldots \quad (5)$$

(die Strecke R_1R positiv zu nehmen, wenn sie gleichgerichtet ist mit der Projection von GZ').

---

[1]) Vergleiche z.B. Appell, Traité de mécanique rationnelle, Gauthier-Villars, 1896, T. II, p. 265.

3. Alle diese Bezeichnungen gelten für die *beiden* Fälle, die wir durch die Figuren 1 und 2 dargestellt haben. Für die eiförmigen Umdrehungskörper der Figur 1 correspondiren aber mit den Werthen $\theta = 0°$ und $\theta = 180°$, die Pole Q und P, welche für diese Werthe durch den Rotationspol erreicht werden und für welche $\Theta'_1 = \Theta_2 = 0$. Für die ringförmige erreicht hingegen für $\theta = 0°$ und $\theta = 180°$ der Rotationspol irgend einen Punkt der Parallelkreise CC′ und AA′. Es wird dann für $\theta = 0°$, $\Theta'_1 = \Theta_2 =$ dem positiv genommenen Radius QC; für $\theta = 180°$, $-\Theta'_1 = \Theta_2 =$ dem positiv genommenen Radius PA.

4. Der *Bewegungszustand* des Revolutionskörpers bestimmen wir im Allgemeinen durch die Componenten p, q und r der Rotationsgeschwindigkeit nach den Richtungen GX′, GY′, GZ′. Man findet leicht:

$$p = -\dot{\psi}\sin\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6),$$

$$q = \dot{\theta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7),$$

$$r = \dot{\phi} + \dot{\psi}\cos\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8).$$

Die Bewegungsgleichungen.

5. Für die Gleichungen welche bei gegebenen Anfangsbedingungen, die Bewegung des Umdrehungskörpers bestimmen, findet man nach bekannten Methoden:

$$\tfrac{1}{2}\left\{(M\Theta^2_1 + M\Theta'^2_1 + A)\,\dot{\theta}^2 + Ap^2 + Cr^2 + M(\Theta_2 r + \Theta_3 p)^2\right\} + Mg\Theta_1 = E, \quad (9)$$

$$\dot{p} = -\left\{\operatorname{cotg}\theta + \frac{MC\Theta_3(\Theta_2 - \Theta_4\sin\theta)}{MA\Theta^2_2 + MC\Theta^2_3 + AC}\right\} p\dot{\theta} - \frac{C(M\Theta_3\Theta_4\cos\theta + M\Theta^2_2 + C)}{MA\Theta^2_2 + MC\Theta^2_3 + AC}\, r\dot{\theta}, \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

$$\dot{r} = -\frac{MA\Theta_2(\Theta_2 - \Theta_4\sin\theta)}{MA\Theta^2_2 + MC\Theta^2_3 + AC}\, p\dot{\theta} - \frac{M\Theta_2(A\Theta_4\cos\theta - C\Theta_3)}{MA\Theta^2_2 + MC\Theta^2_3 + AC}\, r\dot{\theta}, \quad (11)$$

$$\dot{\xi} = \Theta_1\dot{\theta}\sin\psi - \Theta_2 r\cos\psi - \Theta_3 p\cos\psi, \quad . \quad . \quad (12)$$

$$\dot{\eta} = -\Theta_1\dot{\theta}\cos\psi - \Theta_2 r\sin\psi - \Theta_3 p\sin\psi, \quad . \quad . \quad (13)$$

wo A und C die Trägheitsmomente des Umdrehungskörpers in Bezug auf GX′ (oder GY′) und auf GZ′, M seine Masse bezeichnen.

Von diesen Gleichungen können wir die beiden letzten fortlassen, wenn es sich, wie auch hier, nicht um die Bestimmung der Spur auf der horizontalen Ebene handelt.

Es bleibt dann noch ein System von drei Gleichungen (9), (10) und (11) übrig, welches die drei Grössen p, q und θ als Functionen der Zeit bestimmt, und es ist nun unsere Aufgabe mittelst dieses Systemes die verschiedenen möglichen Bewegungsarten des Umdrehungskörpers aufzufinden.

Die Elimination der Zeit.

6. Wir können, wenn die Anfangsbedingungen einmal als gegeben angenommen werden, p, r und θ als Functionen einer einzigen Veränderlichen, z. B. der Zeit betrachten. Ebensogut ist es aber in diesem Falle erlaubt zwei dieser Grössen, z. B. p und r als Functionen der dritten θ aufzufassen. In Uebereinstimmung mit dieser Auffassung setzen wir:

$$p = \mathrm{Y}(\theta) \quad \dots\dots\dots \quad (14)$$

$$r = \mathrm{Z}(\theta) \quad \dots\dots\dots \quad (15)$$

wo also in den Functionen Y und Z, ausser θ, nur noch Integrationsconstanten auftreten können, die von den Anfangsbedingungen abhängig sind.

Wir können auch leicht aus (10) und (11) die Zeit eliminiren und erhalten dann zur Bestimmung von Y und Z, als Functionen von θ, die Gleichungen:

$$\frac{d\mathrm{Y}}{d\theta} = -\{\text{cotg.}\,\theta + \alpha\}\,\mathrm{Y} - \beta \mathrm{Z} \quad \dots\dots \quad (16)$$

$$\frac{d\mathrm{Z}}{d\theta} = -\gamma \mathrm{Y} - \delta \mathrm{Z} \quad \dots\dots\dots \quad (17)$$

wo:

$$\alpha = \frac{\mathrm{M C \Theta_3} (\Theta_2 - \Theta_4 \sin\theta)}{\mathrm{M A \Theta_2^2 + M C \Theta_3^2 + A C}} \quad \dots\dots \quad (18)$$

$$\beta = \frac{\mathrm{C}(\mathrm{M \Theta_3 \Theta_4} \cos\theta + \mathrm{M\Theta_2^2 + C})}{\mathrm{M A \Theta_2^2 + M C \Theta_3^2 + A C}} \quad \dots \quad (19)$$

$$\gamma = \frac{\mathrm{M A \Theta_2} (\Theta_2 - \Theta_4 \sin\theta)}{\mathrm{M A \Theta_2^2 + M C \Theta_3^2 + A C}} \quad \dots\dots \quad (20)$$

$$\delta = \frac{M\Theta_2(A\Theta_4 \cos\theta - C\Theta_3)}{MA\Theta_2^2 + MC\Theta_3^2 + AC} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

7. Diese Gleichungen bilden aber jetzt ein von den Übrigen, und von allen dynamischen Betrachtungen, unabhängiges System wodurch Y und Z als Functionen von θ vollkommen definirt sind. Für einen angegebenen Bewegungszustand, wo im Anfang $\theta = \theta_0$, sind ausserdem die Anfangswerthe $Y_0 = p_0$ und $Z_0 = r_0$ der auf dieser Bewegung bezüglichen Y- und Z-Functionen bekannt. Für alle während der Bewegung durch den Rotationspol *erreichten* Parallelkreise des Umdrehungskörpers, fallen dann die Werthe der Rotationscomponenten p und r fortwährend mit den Werthen von Y und Z zusammen; aber auch für solche Parallelkreisen, die bei der angegebenen Bewegung gar nicht erreicht werden, können immerhin die Functionen Y und Z in Folge der Gleichungen (16) und (17) noch ganz bestimmte Werthe erhalten, und es wird sich im Folgenden zeigen, dass dies wirklich so ist.

Es ergiebt sich darum als zweckmässig, ehe wir zu der Betrachtung der verschiedenen möglichen Bewegungsarten übergehen, vorher den Werthverlauf der Functionen Y und Z zu untersuchen mit der Absicht uns ein deutliches Bild zu erschaffen von der Weise auf welche sie mit ihren Werthen die wirksame Oberfläche des Umdrehungskörpers, so zu sagen, überdecken.

Ableitung einer Riccati'schen Gleichung für die Function U = Y : Z.

8. Es wäre natürlich ein Leichtes aus (16) und (17) Y oder Z zu eliminiren und auf diese Weise zu einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung in Z oder in Y allein zu gelangen. Noch fruchtbarer hat sich aber folgende Behandlungsweise gezeigt: Wir substituiren in beide Gleichungen $Y = UZ$, eliminiren Z und erhalten die Riccati'sche Gleichung [1]):

$$\frac{dU}{d\theta} - \gamma U^2 + (\alpha - \delta + \operatorname{cotg}\theta) U + \beta = 0. \quad . \quad (22)$$

[1]) Für den Fall $Y = 0$, $Z = 0$ verliert diese Gleichung ihre Bedeutung. Wir werden desshalb diesen sehr einfachen Specialfall von unseren weiteren Untertersuchungen ausschliessen. Er tritt ein wenn anfänglich $p_0 = 0$ und $r_0 = 0$. Die Spur des Rotationspoles auf dem Körper ist dann eine Meridiancurve, die auf der Ebene eine Gerade.

Die hier auftretende U hat wieder für solche Parallelkreise, die bei der Bewegung wirklich erreicht werden, eine einfache geometrische Bedeutung. Sie ist nämlich gleich der Tangente des Winkels, welchen die Axe PQ des Umdrehungskörpers und die Projection der augenblicklichen Rotationsaxe auf die Meridianebene des Rotationspolès mit einander einschliessen.

Werthverlauf der U-Functionen.

9. Auf functionentheoretischem Wege werden nun in der erwähnten Schrift die durch die Riccati'sche Gleichung (22) definirten U-Functionen auf ihrem Werthverlaufe untersucht. [1]) Dabei ergiebt sich dass die U-Function über den ganzen wirksamen Theil der Oberfläche eindeutig bestimmt ist so bald ihr Werth U_0 für einen willkürlichen Parallelkreis $\theta = \theta_0$ (θ_0 aber von 0° und 180° verschieden) angegeben wird. Es sind also, für einen beliebigen Umdrehungskörper, eben so viele verschiedene U-Functionen vorhanden als Werthe für U_0 (mit Inbegriff von $U_0 = \infty$) angegeben werden können. Unter diesen unendlich vielen U-Functionen giebt es nun aber zwei, die sich in Hinsicht auf die Werthe 0° and 180° des Argumentes θ, von allen übrigen unterscheiden. Indem nämlich alle übrigen U-Functionen für $\theta = 0^\circ$ und für $\theta = 180^\circ$ unendlich gross werden, wird die *eine* der beiden ausgezeichneten U-Functionen, die wir mit $U^{(Q)}$ andeuten wollen, [2]) unendlich klein für $\theta = 0^\circ$, die *andere*, die wir $U^{(P)}$ nennen, für $\theta = 180^\circ$ [3]). *Ausnahmsweise* können beide ausgezeichnete Functionen zusammenfallen. Wenn das nicht der Fall ist, wird $U^{(Q)}$ sowie jede übrige nicht ausgezeichnete U-Function unendlich gross für $\theta = 180^\circ$, $U^{(P)}$ für $\theta = 0^\circ$.

---

[1]) In einer hoffentlich bald in dieser Zeitschrift zu erscheinenden Arbeit wird dieser Gegenstand, von einem noch etwas allgemeineren Standpunkte ausgehend, in Behandlung kommen.

[2]) Damit wollen wir das Auftreten anderer Unendlichkeits- und Nullstellen der U-Functionen keineswegs ausschliessen; wobei man aber bedenke, dass das Null oder Unendlich gross werden von $U = Y : Z$ an anderen Stellen als $\theta = 0^\circ$ und $\theta = 180^\circ$, nur auf das Verschwinden des Zählers Y oder des Nenners Z hinweist.

[3]) Vergleiche die Figuren 1 und 2. Mit $\theta = 0^\circ$ correspondirt der Pol Q oder der Parallelkreis CC', mit $\theta = 180^\circ$ der Pol P oder der Kreis AA'.

10. Angelegentlich des Beweises dieser Resultate wollen wir nur mittheilen, dass er sich hauptsächlich darauf gründet, dass die Coëfficienten γ, $a - \delta +$ cotg. θ und β der Riccati'schen Gleichung in Folge der in § 1 gemachten Voraussetzungen, endlich und eindeutig sind für alle Werthe von θ, ausgenommen die beiden Werthe 0° und 180°, und solche Werthe für welche Θ_4, d. h. der Krümmungsradius der Meridiancurve, unendlich gross wird. [1])

Hinsichtlich dieser letztgenannten Werthen lässt sich aber leicht zeigen (durch Einführung der neuen Variabeln $s = \int_{\theta_0}^{\theta} \Theta_4 d\theta$, wo s den immer endlich bleibenden Bogen der Meridiancurve bezeichnet), dass das unendlich gross werden von Θ_4 keinen wesentlichen Einfluss auf den Werthverlauf der U-Functionen ausübt.

Es bleiben also noch nur die Ausnahmestellen $\theta = 0°$, und $\theta = 180°$ übrig, die thatsächlich von grosser Bedeutung für das Betragen der U-Functionen sind.

Werthverlauf der Y- und Z-Functionen.

11. Wir betrachten jetzt die durch die Gleichungen (16) und (17) definirte Y- und Z-Functionen. Durch die beiden Anfangswerthe Y_0 und Z_0 sind diese Functionen für den ganzen wirksamen Theil der Oberfläche eindeutig bestimmt, und diese Anfangswerthe sind für jede wirkliche Bewegung nothwendig endlich, weil sie die p_0- und r_0-Componenten der Rotation darstellen. Dann bleiben aber bekanntlich auch die Lösungen Y und Z der linearen Gleichungen (16) und (17) endlich so lange die Coëfficienten cotg $\theta + a$, β, γ und δ keine Unendlichkeitsstellen darbieten. Solche Stellen treten auf für $\theta = 0°$,

---

[1]) Dabei wird angenommen, dass der gemeinschaftliche Nenner $MA\Theta_3^2 + MC\Theta^2_3 + AC$ der Ausdrücke (18)—(21) niemals verschwindet. Auch nicht für $\theta = 0°$ oder $\theta = 180°$. Die beiden hierauf bezüglichen Ausnahmefälle eignen sich besser zu einer absonderlichen Untersuchung und werden also im Weiteren ausgeschlossen. Sie sind Folgende: 1°. $A = 0$ und $C = 0$, wenn der Nenner identisch verschwindet, 2°. (aber nur für den Fall der Figur 1) $A \neq 0$, $C = 0$, wenn der Nenner in den beiden Polen Q und P verschwindet.

$\theta = 180^\circ$, und für solche Werthe von θ, für welche $\Theta_4 = \infty$. Hinsichtlich $\Theta_4 = \infty$, kann aber wieder bewiesen werden, dass dieser Umstand keinen Einfluss auf die Endlichkeit der Functionen Y und Z hat. Diese bleiben also jedenfalls endlich über den ganzen wirksamen Theil der Oberfläche mit möglicher Ausnahme der Pole Q und P oder der Parallelkreisen CC′ und AA′, welche mit den Werthen 0° und 180° des Argumentes übereinstimmen.

Für diese letzteren Werthe werden wir nun aber das Betragen der Functionen Y und Z in den nächstfolgenden §§ näher bestimmen.

12. Zuerst beschäftigen wir uns mit dem Werthe $\theta = 180^\circ$. Wir haben dann zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich 1° $Y_0 : Z_0 \neq U_0^{(P)}$; 2° $Y_0 : Z_0 = U_0^{(P)}$. Im *ersten* Falle ist die U-Function nicht die ausgezeichnete Function $U^{(P)}$ und wird sie also unendlich gross für $\theta = 180^\circ$. Nun ist wegen (16):

$$\frac{dY}{Y} = -(\cot g\, \theta + \alpha)\, d\theta - \frac{\beta}{U}\, d\theta\,, \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

also:

$$l\,\frac{Y}{Y_1} = -\,l\left(\frac{\sin\theta}{\sin\theta_1}\right) - \int_{\theta_1}^{\theta}\left(\alpha + \frac{\beta}{U}\right)d\theta\,, \quad . \quad . \quad (24)$$

wo wir θ_1 in beliebiger Nähe von 180° wählen können. Dann erhält aber das Integral $\int_{\theta_1}^{\theta}\left(\alpha + \frac{\beta}{U}\right)d\theta$ für $\theta = 180^\circ$ sicherlich einen endlichen Werth [1]) und es wird in Folge dessen die Function Y in der unmittelbaren Nähe von $\theta = 180^\circ$ unendlich gross von der Ordnung $(\sin\theta)^{-1}$, oder nach ε^{-1}, wenn wir $\theta = 180^\circ - \varepsilon$ setzen.

---

[1]) Auch noch, wenn Θ_4 für $\theta = 180^\circ$ unendlich gross wird, weil nämlich $\int_{\theta_1}^{\theta} \Theta_4\, d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta} ds$ immer endlich bleibt.

Für die Function Z erhalten wir ähnlicherweise aus (17):

$$Z - Z_1 = -\int_{\theta_1}^{\theta} Y\left(\gamma + \frac{\delta}{U}\right) d\theta, \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

wo nun, wenn wir $Y = W : \sin\theta$ setzen, W endlich ist für $\theta = 180°$.

Bei *ringförmigen* Umdrehungskörpern ist γ, für $\theta = 180°$, endlich aber *nicht* Null, weil $\Theta_2 = PA$ (Fig. 1) wird und $\Theta_4 \sin\theta$ verschwindet [1]). Dann ist also die Function Z in der unmittelbaren Nähe von $\theta = 180°$ logarithmisch unendlich gross.

Bei *eiförmigen* Körpern wird dahingegen, wenn $(\Theta_4)_{\theta=180°}$ endlich ist, γ unendlich klein von der Ordnung ε^2, δ von der Ordnung ε, und ist desshalb Z auch im Pole P immer noch endlich. Für $(\Theta_4)_{\theta=180°} = \infty$ ist eine nähere Untersuchung nöthig, die aber zu dem Resultate führt, dass auch dann noch Z im Pole endlich bleibt.

13. Betrachten wir jetzt den *zweiten* Fall, dass nämlich $Y_0 : Z_0 = U^{(P)}$, dass also über den ganzen wirksamen Theil der Oberfläche die U-Function identisch ist mit der ausgezeichneten Function $U^{(P)}$ von welcher wir wissen dass sie für $\theta = 180°$ den Nullwerth annimmt.

Wir erhalten dann, wegen (17):

$$l\left(\frac{Z}{Z_1}\right) = -\int_{\theta_1}^{\theta} (\gamma U + \delta)\, d\theta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

und diese Gleichung lehrt uns sofort, dass Z, für $\theta = 180°$, endlich bleiben muss und also Y, wegen $Y = UZ$, für denselbigen Werth des Argumentes gleich Null wird.

14. Discutiren wir ähnlicherweise das Betragen von Y und von Z für $\theta = 0°$, d. h. im Pole Q der Fig. 1 oder auf den Parallelkreis CC′ der Fig. 2, dann ist es leicht auf Grund der erhaltenen Resultate folgendes Schema fest zu stellen:

---

1) Auch dann noch wenn Θ_4 für $\theta = 180°$ unendlich gross wird. Es ist nämlich dann $\lim.\ \Theta_4 \sin\theta = \lim.\ \Theta_4\varepsilon = \lim.\ \Delta s$, wo ε der Contingenzwinkel in der Nähe des Punktes C, und Δs den Bogen gerechnet vom Punkte C, darstellt.

für eiförmige Körper	$Y_0 : Z_0 \neq U_0^{(P)}$ und $\neq U_0^{(Q)}$	Y unendlich gross von der Ordnung $(\sin\theta)^{-1}$ in den beiden Polen P und Q. In allen anderen Punkten endlich. [1] Z überall endlich.
	$Y_0 : Z_0 = U_0^{(P)}$ [2] $\neq U_0^{(Q)}$	Y unendlich gross von der Ordnung $(\sin\theta)^{-1}$ im Pole Q; sonst überall endlich und im Pole P gleich Null. Z überall endlich.
	$Y_0 : Z_0 = U_0^{(Q)}$ [3] $\neq U_0^{(P)}$	Y unendlich gross von der Ordnung $(\sin\theta)^{-1}$ im Pole P; sonst überall endlich und im Pole Q gleich Null. Z überall endlich.
für ringförmige Körper	$Y_0 : Z_0 \neq U_0^{(P)}$ und $\neq U_0^{(Q)}$	Y unendlich gross von der Ordnung $(\sin\theta)^{-1}$ auf den beiden Parallelkreisen AA′ und CC′. Sonst überall endlich. Z unendlich gross von der Ordnung $\log \sin\theta$ auf den beiden genannten Parallelkreisen. Sonst überall endlich.
	$Y_0 : Z_0 = U_0^{(P)}$ [2] $\neq U_0^{(Q)}$	Y unendlich gross von der Ordnung $(\sin\theta)^{-1}$ auf dem Kreis CC′; sonst überall endlich, auf dem Kreis AA′ gleich Null. Z unendlich gross von der Ordnung $\log \sin\theta$ auf CC′, sonst überall endlich.
	$Y_0 : Z_0 = U_0^{(Q)}$ [3] $\neq U_0^{(P)}$	Y unendlich gross von der Ordnung $(\sin\theta)^{-1}$ auf AA′, sonst überall endlich, auf CC′ gleich Null. Z unendlich gross von der Ordnung $\log \sin\theta$ auf AA′, sonst überall endlich.

[1]) Hier wie überall mit Einschluss des Nullwerthes. [2]) Also überall $Y : Z = U^{(P)}$. [3]) Also überall $Y : Z = U^{(Q)}$.

Ist ausnahmsweise $U^{(P)} \equiv U^{(Q)}$, dann braucht das Schema für den Fall $Y_0 : Z_0 \neq U_0^{(P)}$ keine Aenderung. Für den Fall $Y_0 : Z_0 = U_0^{(P)} = U_0^{(Q)}$ ist dann aber Y überall endlich und in den Polen P und Q, sowie auch auf den Kreisen AA' und CC', gleich Null; Z überall endlich.

Discussion der verschiedenen möglichen Bewegungsarten. Der allgemeine Fall: $\dot\theta_0 \neq 0$; $p_0 : r_0 \equiv Y_0 : Z_0 \neq U_0^{(P)}$ und $\neq U_0^{(Q)}$.

15. Wir sind jetzt im Stande die verschiedenen Arten der rollenden Bewegung des Umdrehungskörpers zu discutiren.

Zuerst kehren wir zu der Gleichung (9) zurück und schreiben diese in die Gestalt:

$$(M\Theta_1^2 + M\Theta_1'^2 + A)\,\dot\theta^2 = N, \quad . \; . \; . \; . \quad (27)$$

wo

$$N \equiv 2E - 2Mg\Theta_1 - \{AY^2 + CZ^2 + M(\Theta_2 Z + \Theta_3 Y)^2\} \, . \, . \, (28)$$

und

$$2E = 2Mg\,[\Theta_1]_0 + \{AY^2_0 + CZ^2_0 + M([\Theta_2]_0 Z_0 + [\Theta_3]_0 Y_0)^2\} +$$
$$+ (M[\Theta_1]^2_0 + M[\Theta'_1]^2_0 + A)\,\dot\theta^2_0. \quad . \; . \; . \; . \quad (29)$$

Hier ist dann $2E - N$ eine, ausser vom Argumente θ, nur noch von Y_0 und Z_0, also nicht vom $\dot\theta_0$, abhängige Function.

Für die Function $\frac{dN}{d\theta}$, die wir im Folgenden mehrmals brauchen werden, finden wir nach einiger Rechnung unter Anwendung der Gleichungen (16)—(21):

$$\frac{dN}{d\theta} = 2\frac{Y}{\sin\theta}\{(M\Theta_1\Theta_3 + A\cos\theta)Y + (M\Theta_1\Theta_2 + C\sin\theta)Z\} - 2Mg\Theta'_1 . (30)$$

16. Wir ersehen sofort aus Gleichung (27), dass nur solche Theile der Oberfläche vom Rotationspole erreicht werden können, für welche, im gegebenen Falle der Bewegung, die Function N einen positiven Werth erhält. Weil nun für $p_0 : q_0 \equiv Y_0 : Z_0 \neq U_0^{(P)}$ die Function augenscheinlich immer negativ unendlich gross wird im Pole P oder auf dem Kreise AA', so wird für die Erreichung dieses Poles oder des Kreises AA' in erster Linie gefordert, dass

die Bedingung $p_0 : q_0 = U_0^{(P)}$ erfüllt sei [1]), und ebenso zur Erreichung des Poles Q oder des Kreises CC', dass $p_0 : q_0 = U_0^{(Q)}$ Dass diese Bedingung aber nicht immer genügt, werden wir bald sehen. Vorher untersuchen wir näher den allgemeineren Fall $\dot\theta_0 \neq 0$, $p_0 : q_0 \neq U_0^{(P)}$ und $\neq U_0^{(Q)}$.

17. In diesem Falle ist N für $\theta = \theta_0$ sicherlich positiv, und für $\theta = 0°$ und 180° sicherlich negativ und unendlich gross. Weil aber N, in Folge der in § 1 gemachten Voraussetzungen, eine stetige Function von θ ist, so muss sie zwischen $\theta = \theta_0$ und $\theta = 180°$, und auch zwischen $\theta = \theta_0$ und $\theta = 0°$, wenigstens einmal verschwinden.

Es seien nun $\theta_{m_1} < \theta_0$ und $\theta_{m_2} > \theta_0$ die beiden Werthe des Argumentes wofür dieses Verschwinden zum ersten Male, von θ_0 aus gerechnet, geschieht dann ist es sofort deutlich dass die Spur des Rotationspoles auf dem Umdrehungskörper, wenn man sie vom Anfangszustand der Bewegung aus vorwärts und rückwärts verfolgt, sich notwendig einerseits, in der Richtung der grösseren Werthen von θ, bis zu dem Parallelkreise $\theta = \theta_{m_2}$; andererseits bis zu dem Parallelkreise $\theta = \theta_{m_1}$; fortsetzen, oder doch wenigstens sich diesen Parallelkreisen asymptotisch nähern muss.

Dabei werden die Werthe θ_{m_1} und θ_{m_2} destoweiter aus einander liegen, je grösser $\dot\theta^2_0$ genommen wird.

Betrachten wir nun den Parallelkreis $\theta = \theta_{m_2}$. Für diesen Kreis kann $\left(\frac{dN}{d\theta}\right)_{m_2}$ nicht positiv sein, weil N für $\theta = \theta_{m_2} - \varepsilon$ (ε klein und positiv) positiv sein muss. Wir haben also zwei Fälle zu unterscheiden 1° $\left(\frac{dN}{d\theta}\right)_{m_2} < 0$, 2° $\left(\frac{dN}{d\theta}\right)_{m_2} = 0$ [2]).

18. Für $\left(\frac{dN}{d\theta}\right)_{m_2} < 0$, ist N für $\theta = \theta_{m_2} + \varepsilon$ nothwendig negativ. Der Parallelkreis $\theta = \theta_{m_2}$ kann also vom Rotationspol nicht

[1]) Dass also die Axe PQ und die Projection der Rotationsgeschwindigkeit auf die Meridianebene des Rotationspoles einen bestimmten, übrigens für jeden Parallelkreis verschiedenen, Winkel mit einander einschliessen, dessen Tangente $= U^{(P)}$.

[2]) Der Fall $\left(\frac{dN}{d\theta}\right)_{m_2} = \infty$ ist durch (30) ausgeschlossen.

überschritten werden. Ausserdem erhält dann bekanntlich das Integral:

$$t_{m_2} - t_0 = \int_{\theta_0}^{\theta_{m_2}} \sqrt{\frac{M\Theta_1^2 + M\Theta'^2_1 + A}{N}}\, d\theta, \quad \ldots \quad (31)$$

das sich aus (27) ergiebt, einen endlichen Werth [1]). Der Rotationspol erreicht also den betreffenden Parallelkreis in endlicher Zeit auf endlichem Wege. Von diesem Augenblicke an wird die Bewegung, in Hinsicht auf die Meridianebene des Berührungspunktes, symmetrisch fortgesetzt und braucht also nicht weiter verfolgt zu werden.

19. Ist hingegen $\left(\frac{dN}{d\theta}\right)_{m_2} = 0$, dann wird, wenn $\left(\frac{d^2N}{d\theta^2}\right)_{m_2}$ [2]) endlich ist (mit Inbegriff des Nullwerthes), zur Erreichung des Werthes $\theta = \theta_{m_2}$ eine unendliche Zeit erforderlich sein. Die Spur nähert sich dem Parallelkreise auf asymptotischem Wege.

20. Nicht unwichtig ist aber auch der Fall $\left(\frac{dN}{d\theta}\right)_{m_2} = 0$, $\left(\frac{d^2N}{d\theta^2}\right)_{m_2} = \infty$, besonders weil er sich verwirklicht so manchmal der Krümmungsradius Θ_4 der Meridiancurve für $\theta = \theta_{m_2}$ unendlich gross wird und zugleich Y_0 und Z_0 solche Werthe besitzen dass $\left(\frac{dN}{d\theta}\right)_{m_2} = 0$. Bestimmt man nämlich mittelst nochmaliger Differentation von (30) den Ausdruck für $\frac{d^2N}{d\theta^2}$ dann sieht man leicht dass dieser Ausdruck in Folge (16)—(21) sich in eine lineare Function von Θ_4 umbilden lässt und also zugleich mit Θ_4 unendlich gross wird.

---

[1]) Die Endlichkeit oder Unendlichkeit des Integrales ist hier vom letzten Theile des Integrationsweges abhängig. Für diesen Theil darf man aber $N = -\left(\frac{dN}{d\theta}\right)_{m_2}(\theta_{m_2} - \theta)$ setzen. Natürlich kann man den Beweis durch Einschliessung zwischen Grenzen strenger führen.

[2]) Dass $\left(\frac{d^2N}{d\theta^2}\right)_{m_2}$ überhaupt existirt geht aus (30) hervor in Anschluss mit den § 1 gemachten Voraussetzungen namentlich mit dem Vorhandensein eines bestimmten Krümmungsradius in jedem Punkte der Meridiancurve.

Nun ist aber (vergleiche Seite 113, Note 1), auch für $\Theta_4 = \infty$, lim. $\Theta_4(\theta_{m_2} - \theta)$ immer Null. Mit diesem Umstande wird am einfachsten Rechnung getragen wenn wir setzen: $\Theta_4 = \psi(\theta)(\theta_{m_2} - \theta)^{-p}$, wo $\psi(\theta_{m_2})$ endlich [1]) und $p < 1$; dann ist aber $\left(\frac{dN}{d\theta}\right)$ in der Nähe von $\theta = \theta_{m_2}$, wenn $\left(\frac{dN}{d\theta}\right)_{m_2}$ Null sein soll, nothwendig von der Ordnung $(\theta_{m_2} - \theta)^{1-p}$ und $(N)_{m_2}$ von der Ordnung $(\theta_{m_2} - \theta)^{2-p}$. In Folge dessen ist das Integral (31) endlich, d. h. der Parallelkreis $\theta = \theta_{m_2}$ wird in endlicher Zeit erreicht.

In *dieser* Hinsicht stimmt also der vorliegende Specialfall mit dem allgemeineren Fall $\left(\frac{dN}{d\theta}\right)_{m_2} < 0$ überein. Doch ist zwischen beiden Fällen ein wichtiger Unterschied. Differentiirt man nämlich die Gleichung (27) nach der Zeit, dividirt man durch $\dot{\theta}$, und setzt man $\theta = \theta_{m_2}$, so erhält man (weil $\dot{\theta}_{m_2} = 0$):

$$(M(\Theta_1)^2_{m_2} + M(\Theta'_1)^2_{m_2} + A) . \ddot{\theta}_{m_2} = \left(\frac{dN}{d\theta}\right)_{m_2} \quad . . . \quad (32)$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich unmittelbar dass für den Fall $\left(\frac{dN}{d\theta}\right)_{m_2} < 0$ der Rotationspol den Parallelkreis $\theta = \theta_{m_2}$ sofort wieder verlassen muss, dass er dahingegen für den Spezialfall den wir betrachten, wo $\left(\frac{dN}{d\theta}\right)_{m_2} = 0$, in vollkommenster Uebereinstimmung mit den dynamischen Bewegungsgleichungen, diesen Parallelkreis verfolgen kann. Weil aber natürlich daneben auch die in Hinsicht auf die Meridianebene symmetrische Forsetzung der Spur möglich bleibt so liegt hier ein Fall *dynamischer Unbestimmtheit* vor. Und es ist gewiss merkwürdig dass man also zu einem solchen Falle gelangen kann sobald bei der rollenden Bewegung eines Umdrehungskörpers über die horizontale Ebene der Krümmungsradius der Meridiancurve unendlich gross wird an einer Stelle $\theta = \theta_1$, wo es unter den unendlich vielen möglichen Bewegungen mit constantem θ auch instabile giebt.

---

[1]) Aber *nicht* Null. So ist es für jede algebraische Curve. Bei transcendenten Curven können andere Verhältnisse eintreten, die wir hier ausser Betracht lassen.

21. Ganz aehnliche Betrachtungen, wie wir sie hier für denjenigen Theil der Bewegung, wozu wachsende Werthe des Argumentes θ gehören, entwickelt haben, gelten natürlich auch für den andern Theil, während welcher θ bis zum Werthe $\theta = \theta_{m_1}$ abnehmen kann. Wir brauchen diese Betrachtungen wohl nicht auszuschreiben und können dershalb jetzt zu den Specialfällen $p_0 : r_0 = U_0^{(P)}$ und $p_0 : r_0 = U_0^{(Q)}$ übergehen, wobei es aber auch wieder genügen wird einer dieser beiden einer näheren Betrachtung zu unterziehen.

Fortsetzung der Discussion der verschiedenen möglichen Bewegungsarten. Der Fall $\dot\theta_0 \neq 0$; $p_0 : r_0 \equiv Y_0 : Z_0 = U_0^{(P)}$ (resp. $U_0^{(Q)}$).

22. Im Falle $p_0 : r_0 \equiv Y_0 : Z_0 = U_0^{(P)}$ bleiben, wie wir gesehen haben, Y und Z auch noch endlich im Pole P oder auf dem Kreis AA'. Dann ergiebt sich aber aus (28) und (29), dass man $\dot\theta^2_0$ so gross nehmen kann, dass die Function N überall zwischen $\theta = \theta_0$ und $\theta = 180°$ einen positiven Werth bekommt. Dabei wird dann nothwendig, bei wachsenden Werthen des Argumentes θ, der Rotationspol, wegen (27), den geometrischen Pol P oder den Parallelkreis AA' erreichen. Dort angekommen ist $\dot\theta$ noch immer nicht Null. Bei den eiförmigen Körpern wird der Rotationspol also den Pol P überschreiten und die Spur sich symmetrisch zu der ihr in P senkrechten Meridianebene fortsetzen. Bei den ringförmigen werden sich dahingegen, weil plötzlich der ganze Kreis AA' die horizontale Ebene berührt, gewisse Stosskräfte entwickeln deren Wirkung wir nicht weiter untersuchen werden.

Wir können also jedenfalls folgenden Satz aussprechen:

Wenn $p_0 : r_0 = U_0^{(P)}$ (resp. $U_0^{(Q)}$) und $\dot\theta^2_0$ genügend gross genommen werden, dann wird bei wachsenden (resp. abnehmenden) Werthen von θ nothwendig der Pol P oder der Kreis AA' (resp. der Pol Q oder der Kreis CC') vom Rotationspole erreicht. Ist hingegen $p_0 : r_0 \neq U_0^{(P)}$ (resp. $U_0^{(Q)}$), dann kann eine solche Erreichung unter keiner Bedingung stattfinden.

23. Verringern wir nun allmählig den Werth von $\dot\theta^2_0$, den wir voraussetzlich anfänglich so gross genommen haben, dass der Pol P oder der Kreis AA' wirklich erreicht wird, dann

kann es vorkommen, dass auch noch für $\dot{\theta}^2_0 = 0$, der Werth von N überall zwischen θ_0 und 180° positiv bleibt. In *diesem* Falle ist die Erreichung des Poles P oder des Kreises AA′ an keiner weiteren Bedingung als der Bedingung $p_0 : r_0 = U_0^{(P)}$ unterworfen.

Es kann aber auch vorkommen, dass für irgend einen Grenzwerth von $\dot{\theta}^2_0$ die Function N zum ersten Male, entweder auf einem zwischen $\theta = \theta_0$ und $\theta = 180°$ gelegenen Parallelkreise, oder im Pole P (oder auf dem Kreise AA′ [1]) gleich Null wird.

Für alle Werthe van $\dot{\theta}^2_0$, *kleiner* als dieser Grenzwerth, wird dann der Pol P oder der Kreis AA′ sicherlich *nicht*, für alle *grössere* Werthe sicherlich *wohl* (und in endlicher Zeit) erreicht. Es bleibt also nur noch die Frage übrig, welche Bewegungsart für diesen Grenswerth selbst stattfinden wird.

Liegt nun die Stelle, wo N zuerst gleich Null wird, ausserhalb des Poles P oder des Kreises AA′, dann ist es deutlich, dass an dieser Stelle, weil N dort ein Minimum ist, auch $\frac{dN}{d\theta}$ verschwindet, dass also eine der beiden in § 19 und § 20 beschriebenen Bewegungsarten auftreten muss.

Liegt sie aber im Pole selbst (oder auf AA′), dann muss für wachsende θ der Pol P (oder der Kreis AA′) entweder in endlicher Zeit (und auf endlichem Wege) erreicht, oder asymptotisch genähert werden.

24. Um nun zwischen diesen beiden Alternativen zu entscheiden berechnen wir für diesen Fall, mittelst (30), den Werth von $\left(\frac{dN}{d\theta}\right)_{180°}$.

Weil für $p_0 : q_0 = U_0^{(P)}$ die Function Y für $\theta = 180°$ verschwindet, haben wir sofort:

$$\left(\frac{dN}{d\theta}\right)_{180°} = (2\,M\Theta_1\Theta_2 Z)_{180°} \,.\, \lim \left(\frac{Y}{\sin\theta}\right)_{180°} - 2Mg\,(\Theta'_1)_{180°} \ldots (33)$$

---

[1]) Es wird sich jedoch im folgenden § ergeben, dass für ringförmige Körper die Function N nicht zum erste Male (beim Verringern von $\dot{\theta}^2_0$) auf den Kreis AA′ verschwinden kann. Es ist nämlich dort $\frac{dN}{d\theta}$ immer positiv und es muss also im Augenblicke wo N dort Null ist, diese Function in der unmittelbaren Umgebung schon negativ, also vorher Null, geworden sein. Vorläufig lassen wir das aber dahingestellt.

Nun ist aber $\lim \left(\frac{Y}{\sin\theta}\right)_{180^\circ} = \lim \left(\frac{dY}{d\theta} : \cos\theta\right)_{180^\circ} = -\left(\frac{dY}{d\theta}\right)_{180^\circ}$ und, wegen (16): $\left(\frac{dY}{d\theta}\right)_{180^\circ} = -\left(\frac{dY}{d\theta}\right)_{180^\circ} - (\beta Z)_{180^\circ}$; also $\left(\frac{dY}{d\theta}\right)_{180^\circ} = -\frac{1}{2}(\beta Z)_{180^\circ}$.

Auf diese Weise findet man schliesslich, wenn man den Werth von β mittelst (19) ausschreibt:

$$\left(\frac{dN}{d\theta}\right)_{180^\circ} = \left(\frac{MC\Theta_1\Theta_2(-M\Theta_3\Theta_4+M\Theta_2^2+C)}{MA\Theta_2^2+MC\Theta_3^2+AC}\right)_{180^\circ}(Z)^2_{180^\circ} - 2Mg(\Theta'_1)_{180^\circ}. \quad (34)$$

Bei *eiförmigen* Körpern ist nun, nach § 3, $(\Theta_2)_{180^\circ} = (\Theta'_1)_{180^\circ} = 0$, und also, wenn Θ_4 im Pole endlich ist, auch $\left(\frac{dN}{d\theta}\right)_{180^\circ} = 0$.

Bei diesen Körpern ist also, wenn $(\Theta_4)_{180^\circ}$ endlich ist, für den Grenzwerth von θ^2_0 für welchen $(N)_{180^\circ}$ verschwindet, eine unendliche Zeit zur Erreichung des Poles erforderlich.

Für $(\Theta_4)_{180^\circ} = \infty$ ist $\left(\frac{dN}{d\theta}\right)_{180^\circ}$ Null oder nicht Null je nachdem lim. $\Theta_2\Theta_4$ für $\theta = 180^\circ$ verschwindet oder nicht. Beide Fälle können vorkommen. Im ersten Fall hat man wieder mit einem Beispiele dynamischer Unbestimmtheit zu thun, d. h. der Pol P wird dann in endlicher Zeit erreicht, aber nachher kann dann, ohne Verletzung der dynamischen Grundgleichungen, entweder eine symmetrische Fortsetzung der Bewegung oder ein bleibendes Rotiren mit dem Pole P als Rotationspol stattfinden. Im zweiten Fall wird der Pol P in endlicher Zeit erreicht und dann überschritten.

Anders ist es mit den *ringförmigen* Körpern gelegen. Für diese ist, nach § 3, $(\Theta_2)_{180^\circ}$ nicht Null, sondern positiv, $(\Theta'_1)_{180^\circ}$ negativ und auch (Θ_3), in Folge Gleichung (3), negativ. Es ist also bei *diesen* Körpern $\left(\frac{dN}{d\theta}\right)_{180^\circ}$ die Summe zweier positiven Grössen und desshalb immer positiv, woraus, wie wir schon in der Note zum vorigen § gesehen haben, hervorgeht, dass bei ringförmigen Körpern das erstmalige Verschwinden von N niemals auf AA′ vorkommen kann, sondern immer auf irgend einem zwischen $\theta = \theta_0$ und $\theta = 180^\circ$ gelegenen Parallelkreise.

Bei solchen Körpern kann also eine asymptotische Annäherung zum Kreise AA' niemals statthaben. Beim Verringern von $\dot{\theta}^2_0$ wird hier die Erreichung dieses Kreises plötzlich durch eine, im Allgemeinen asymptotische, Annäherung zu irgend einem zwischengelegenen Parallelkreise gefolgt.

25. Für den Fall $\dot{\theta}_0 \neq 0$; $p_0 : r_0 \equiv Y_0 : Z_0 = U_0^{(Q)}$ gelten natürlich in Beziehung zum Pole Q oder zum Parallelkreise CC' ganz analoge Betrachtungen und Schlüsse wie wir sie in den drei vorigen §§ für den Fall $\dot{\theta}_0 \neq 0$; $p_0 : r_0 = U_0^{(P)}$ in Beziehung zum Pole P oder zum Parallelkreise AA' entwickelt haben, und auch der Ausnahme-Fall $p_0 : r_0 = U_0^{(P)} \equiv U_0^{(Q)}$ bietet hier keine weiteren Schwierigkeiten.

Der Fall $\dot{\theta}_0 = 0$. Bewegungen mit constantem θ.

26. Es bleibt uns also zur Behandlung nur noch den Fall $\dot{\theta}_0 = 0$ übrig. Ist dann aber $\left(\frac{dN}{d\theta}\right)_0 \neq 0$, so hat das Verschwinden von $\dot{\theta}_0$ keine weitere Bedeutung als diese: dass θ_0 mit θ_{n_1}, oder mit θ_{n_2}, zusammenfällt.

Ist hingegen $\left(\frac{dN}{d\theta}\right)_0 = 0$, so handelt es sich um eine Bewegung bei welcher θ constant bleibt, oder wenigstens, im Falle $\Theta_4 = \infty$, constant bleiben *kann*. Auch die Bewegungen dieser Art werden in der vorliegenden Dissertation ausführlich besprochen und besonders auf ihre Stabilität oder Instabilität untersucht. Für den Augenblick werden wir aber darauf nicht weiter eingehen.

R 7 g

OVER DE BEWEGING VAN EEN MATERIEEL DEELTJE IN EEN VLAK, EENPARIG ROTEEREND KRACHTENVELD.

DOOR

F. SCHUH
(Sneek.)

(Oplossing van Prijsvraag no. 10 voor het jaar 1902.)

De opgave luidde aldus:

„Een materieel deeltje bevindt zich in een evenwichtspunt van een gegeven vlak krachtenveld met potentiaalfunctie. Zoo nu dit krachtenveld met eene gegevene constante hoeksnelheid om het bedoelde evenwichtspunt roteert, vraagt men de condities voor de stabiliteit of instabiliteit van dit evenwicht, en een onderzoek naar de gedaante der banen, die bij evenwichtsverstoring beschreven worden, voor zooverre de omgeving van het evenwichtspunt betreft.”

Deze prijsvraag werd, zooals Prof. D. J. KORTEWEG mij mededeelde, gesteld naar aanleiding van een door H. LAMB behandeld vraagstuk (zie *Memoirs and Proceedings of the Manchester Literary and Philosophical Society*, 4th Series, IX 1, 1894/95, p. 10—11), waarbij de stabiliteit onderzocht wordt van een materieel deeltje, geplaatst in het laagste punt van een ellipsoïde, die om een verticaal geplaatste hoofdas roteert; hierbij wordt ook de invloed beschouwd van een wrijving tusschen het materieele deeltje en de ellipsoïde, evenredig aan de *relatieve* snelheid. Verder wijst LAMB er op, dat hetzelfde vraagstuk zich voordoet bij een slinger van BLACKBURN, waarvan de bovenste horizontale as om een verticale as door het middelpunt van den slinger in rotatie gebracht wordt, met dit verschil, dat nu de wrijving afhankelijk is van de *absolute* snelheid.

In de eerste twee hoofdstukken heb ik wrijving buitengesloten, terwijl in het derde hoofdstuk zoowel het geval van wrijving evenredig aan de relatieve, als aan de absolute snelheid nader onderzocht is.

EERSTE HOOFDSTUK.

VOORWAARDEN VOOR STABILITEIT (EN LABILITEIT).

§ 1. Afleiding der bewegingsvergelijkingen op de draaiende assen.

1. Zijn x' en y' de coordinaten van het zich bewegende materieele punt P ten opzichte van een vast rechthoekig indirect coordinatenstelsel met het evenwichtspunt O als oorsprong; x en y de coordinaten van P ten opzichte van een coordinatenstelsel, dat de rotatie met de hoeksnelheid ω (die we positief noemen, zoo het eene rotatie is met de wijzers van het uurwerk mee) met het krachtenveld mee uitvoert, en op het tijdstip $t=0$ met het vaste coordinatenstelsel samenvalt, dan is

$$x = x'\cos\omega t - y'\sin\omega t, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$y = x'\sin\omega t + y'\cos\omega t, \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

en omgekeerd

$$x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t, \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

$$y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t. \quad \ldots\ldots \quad (4)$$

Hierin kunnen we zonder beperking ω *positief, en dus de rotatie met het uurwerk mee* onderstellen.

Door (1) en (2) te differentieeren, vindt men

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt}\cos\omega t - \frac{dy'}{dt}\sin\omega t - \omega y,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx'}{dt}\sin\omega t + \frac{dy'}{dt}\cos\omega t + \omega x,$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2}\cos\omega t - \frac{d^2y'}{dt^2}\sin\omega t - 2\omega\frac{dy}{dt} + \omega^2 x, \quad \ldots \quad (5)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt^2}\sin\omega t + \frac{d^2y'}{dt^2}\cos\omega t + 2\omega\frac{dx}{dt} + \omega^2 y. \quad \ldots \quad (6)$$

Zijn de componenten van de kracht, per massaeenheid van het materieele punt, X′ en Y′ in de richting der vaste, en X en Y in de richting der draaiende assen, dan is

$$X = X' \cos \omega t - Y' \sin \omega t, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

$$Y = X' \sin \omega t + Y' \cos \omega t. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

De *bewegingsvergelijkingen op de vaste assen* zijn

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = X', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = Y', \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

terwijl (5) en (6), lettend op (9), (10), (7) en (8), leveren

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X - 2\omega \frac{dy}{dt} + \omega^2 x, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y + 2\omega \frac{dx}{dt} + \omega^2 y. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Dit zijn de gezochte bewegingsvergelijkingen op de draaiende assen.

2. Men kan deze vergelijkingen nog eenvoudiger afleiden uit de *schijnkrachten van Coriolis.* Men heeft nl.

$$p'' = p + (-p') + \{-2 \sin_{\pi}(\omega\, v''\}, \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

waarin p'' de *relatieve*, p de *ware*, p' de *meevoerings-*, en $2 \sin_{\pi}(\omega\, v'')$ de *samengestelde versnelling* voorstelt, d. i. het dubbel van de snelheid, die het uiteinde van den vector v'', de *relatieve snelheid*, verkrijgt door een rotatie met een hoeksnelheid ω, de *meevoeringsrotatiesnelheid*, om een as door het beginpunt van v''. Van $-p'$, de *eerste schijnkracht van Coriolis* of de *centrifugaalkracht* (alles is steeds per massaeenheid berekend, zoodat we geen verschil maken tusschen versnelling en kracht), zijn de componenten in de richtingen der draaiende assen $\omega^2 x$ en $\omega^2 y$, en van $-2 \sin_{\pi}(\omega\, v'')$, de *tweede schijnkracht van Coriolis*, $-2\omega \frac{dy}{dt}$ en $2\omega \frac{dx}{dt}$, zoodat (13) door ontbinding in de richting der draaiende assen in (11) en (12) overgaat.

§ 2. Roteerend krachtenveld zonder potentiaalfunctie.

1. We zullen in dezen en de volgende twee paragraphen aannemen, dat het krachtenveld *geen potentiaalfunctie* heeft. Verder nemen we aan, dat X en Y, die niet van den tijd t afhangen, volgens TAYLOR naar x en y te ontwikkelen zijn, en *dat de termen van den eersten graad dezer ontwikkeling niet allen nul zijn.* De termen van den tweeden en hoogeren graad verwaarloozend, heeft men

$$X = -ax + by,$$

$$Y = -cy + dx.$$

De draaiende assen kunnen echter zoo gekozen worden, dat $b = -d = p$ wordt, zoodat

$$X = -ax + py, \quad \ldots \ldots \quad (14)$$

$$Y = -cy - px. \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

De zoo gekozen assen zullen we de *hoofdassen* van het veld noemen, en a en c de bij die hoofdassen behoorende *coëfficienten.* In het vervolg zullen we aannemen, dat de verwaarloosde termen in het geheel niet aanwezig zijn, en de vergelijkingen (14) en (15) dus als streng beschouwen, m. a. w. we nemen aan, *dat O een evenwichtspunt van een lineair krachtenveld is.*

In het algemeen is O het eenige evenwichtspunt van het veld; is echter

$$ac + p^2 = 0,$$

dan is er een rechte door O, waarvan ieder punt evenwichtspunt is, die we *evenwichtsrechte* zullen noemen.

Uit (14) en (15) ziet men, dat de kracht uit twee gedeelten bestaat, die we *potentiaalkracht* en *rotatiekracht* noemen. De eerste, met componenten $-ax$ en $-cy$ heeft een potentiaalfunctie

$$V = \tfrac{1}{2}(ax^2 + cy^2); \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

de tweede, met componenten py en $-px$, staat loodrecht op den voerstraal, en is gelijk aan p-maal dien voerstraal, terwijl het moment om O het teeken van p heeft.

2. De bewegingsvergelijkingen worden nu

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\frac{dy}{dt} - (a-\omega^2)x + py, \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega\frac{dx}{dt} - (c-\omega^2)y - px. \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

Hieraan voldoet

$$x = Ae^{rt},$$
$$y = Ce^{rt},$$

waarin A, C en r constanten zijn, die voldoen aan

$$(r^2 + a - \omega^2)A = (p - 2\omega r)C, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

$$-(p - 2\omega r)A = (r^2 + c - \omega^2)C, \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

of A en C elimineerend

$$r^4 + (2\omega^2 + a + c)r^2 - 4\omega pr + (a-\omega^2)(c-\omega^2) + p^2 = 0 \ldots (21)$$

Het evenwicht is alleen dan stabiel, als alle wortels van deze biquadratische vergelijking een negatief bestaanbaar deel hebben, of een bestaanbaar deel nul, mits in het laatste geval de wortel enkelvoudig zij (zooals uitvoeriger wordt uiteengezet in Hoofdstuk III § 1, voor het meer algemeene geval, dat er wrijving is). Nu is de som der wortels van (21), en dus ook de som hunner bestaanbare deelen, *nul*, zoodat *het evenwicht alleen stabiel is, als alle wortels van* (21) *zuiver imaginair en verschillend zijn.* Dit kan echter alleen dan het geval zijn, als (21) een quadratische vergelijking in r^2, dus als $\omega p = 0$ is, zoodat er alleen dan stabiliteit mogelijk is, als òf $\omega = 0$ d. w. z. het veld niet roteert, òf $p = 0$ d. w. z. er een potentiaalfunctie is. Hiermee is natuurlijk niet gezegd, dat er dan stabiel evenwicht zijn *moet*, alleen, dat er stabiel evenwicht zijn *kan*.

Is er dus geen potentiaalfunctie, en stabiel evenwicht als het veld in rust is, dan maakt de geringste rotatie van het krachtenveld het evenwicht labiel; omgekeerd is er stabiel evenwicht bij een roteerend krachtenveld met potentiaalfunctie, dan maakt toevoeging van de kleinste rotatiekracht het evenwicht labiel.

Daar het ons hoofdzakelijk om de bestudeering van het *stabiele* evenwicht te doen is, zullen we de beide gevallen $\omega = 0$ en $p = 0$ nader beschouwen, het triviale geval $\omega = p = 0$ uitsluitend.

§ 3. Rustend krachtenveld zonder potentiaalfunctie.

1. We onderstellen nu $\omega = 0$ en $p \neq 0$, waardoor de vergelijkingen (17), (18), (19), (20) en (21) worden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -ax + py, \quad \ldots \ldots \quad (22)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -cy - px, \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

$$(r^2 + a)\,A = pC, \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

$$-pA = (r^2 + c)\,C, \quad \ldots \ldots \quad (25)$$

$$r^4 + (a + c)\,r^2 + ac + p^2 = 0, \quad \ldots \quad (26)$$

waaruit

$$r^2 = -\tfrac{1}{2}(a + c) \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(a - c)^2 - 4p^2}.$$

2. We hebben nu twee gevallen te onderscheiden:

1ste *Geval. De beide wortels r^2 zijn bestaanbaar.*

Zijn die wortels $r^2 = r^2_1$ en $r^2 = r^2_2$. De waarden van A, behoorend bij de vier wortels $+r_1$, $-r_1$, $+r_2$ en $-r_2$ in r, zullen we onderscheiden als A_1, A'_1, A_2 en A'_2, en evenzoo voor C. Nu blijkt uit (24) en (25)

$$\frac{C_1}{A_1} = \frac{C'_1}{A'_1} = k_1,$$

$$\frac{C_2}{A_2} = \frac{C'_2}{A'_2} = k_2,$$

waarin

$$k_1 = \frac{r^2_1 + a}{p}, \quad \ldots \ldots \quad (27)$$

$$k_2 = \frac{r^2_2 + a}{p}. \quad \ldots \ldots \quad (27)^*$$

De oplossing van (22) en (23) is dus

$$x = \quad (A_1 e^{r_1 t} + A'_1 e^{-r_1 t}) + (A_2 e^{r_2 t} + A'_2 e^{-r_2 t}), \ . \quad (28)$$

$$y = k_1 (A_1 e^{r_1 t} + A_1' e^{-r_1 t}) + k_2 (A_2 e^{r_2 t} + A'_2 e^{-r_2 t}), \ . \quad (29)$$

waarin A_1, A'_1, A_2 en A'_2 willekeurige constanten zijn. Het punt voert dus twee bewegingen uit (met den index 1 en met

den index 2) langs rechten door O, die we *baanrechten* zullen noemen. Tusschen de richtingscoëfficienten k_1 en k_2 dier rechten bestaat de betrekking

$$k_1 \cdot k_2 = 1,$$

zooals uit (26) gemakkelijk is af te leiden. Hieruit volgt, *dat de rechten, waarlangs beide bewegingen worden uitgevoerd, symmetrisch liggen ten opzichte der deellijnen van den hoek der hoofdassen van het veld.*

Daar verder

$$k_1 + k_2 = \frac{a - c}{p},$$

en we zonder wezenlijke beperking $p > 0$ (daar toch $\omega \neq 0$) en $a > c$ kunnen onderstellen, zoo liggen beide baanrechten in het eerste en derde quadrant, m. a. w.:

Beide baanrechten liggen in de quadranten beschreven door de hoofdas met kleinste bijbehoorende coëfficient, zoo die om O met de rotatiekracht mee naar de andere hoofdas toe draait.

Is $p > 0$ en $a > c$, en zijn dus k_1 en k_2 beide positief, dan is, voor $r^2_1 < r^2_2$, volgens (27) en (27)*, $k_1 < k_2$. Noemen we de baanrechten, behoorend bij r^2_1 en r^2_2, de *eerste* en de *tweede baanrechte*, dan volgt daaruit, *dat de eerste baanrechte* (*behoorend bij den kleinsten wortel* r^2) *het dichtst ligt bij de hoofdas met den grootsten coëfficient.*

Voor den hoek ϕ, dien de tweede baanrechte met de wijzers van het uurwerk mee moet gedraaid worden, om met de eerste baanrechte samen te vallen, vindt men gemakkelijk

$$\cos \phi = \frac{2p}{a - c} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Deze hoek is alleen recht in het triviale geval $p = 0$, terwijl ϕ nul is, als $2p = \pm (a - c)$ is, dus als beide wortels r^2 van (26) gelijk zijn.

De uitkomsten, omtrent de beweging verkregen, waren ook te verwachten. Immers uit (14) en (15) leidt men af, dat er onder de krachtlijnen, die in het algemeen krom zijn, twee rechten door O zijn, die we *krachtrechten* noemen. Op een punt van zulk een krachtrechte is

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \lambda,$$

waaruit volgt

$$(\lambda + a)\,x = py,$$

$$-px = (\lambda + c)\,y.$$

Vergelijkt men deze vergelijkingen met (24) en (25), dan ziet men direct, dat deze krachtrechten niets anders zijn dan de bovenbeschouwde baanrechten, en dat $\lambda = r^2$, en dus de bijbehoorende krachtcoëfficient (d. i. de verhouding tusschen kracht en voerstraal) r^2 is. In het geval, dat we nu behandelen, zijn beide krachtrechten bestaanbaar; zij kunnen dus als assen van een scheefhoekig coordinatenstelsel gekozen worden. Neemt men de eerste baanrechte als X-as, en de tweede als Y-as aan, dan worden de krachtcomponenten in de richting der nieuwe assen

$$X^* = r^2_1 x^*,$$

$$Y^* = r^2_2 y^*,$$

en de bewegingsvergelijkingen op de nieuwe assen

$$\frac{d^2x^*}{dt^2} = r^2_1 x^*,$$

$$\frac{d^2y^*}{dt^2} = r^2_2 y^*.$$

Ten opzichte dier scheefhoekige assen is dus de beweging volkomen gelijk aan die bij een krachtenveld met potentiaalfunctie ten opzichte der hoofdassen.

Voor r^2 positief, en dus r bestaanbaar, is de beweging langs een krachtrechte een exponentieele, en dus *labiel.*

Is r^2 negatief, dan wordt de beweging langs de krachtrechte harmonisch, met een periode $\dfrac{2\pi}{\sqrt{-r^2}}$, en dus *stabiel.*

In het overgangsgeval $r^2 = 0$, dat zich voordoet voor $p^2 + ac = 0$, wordt de beweging langs de krachtrechte eenparig, en dus *labiel.* Dit was te verwachten, daar nu de krachtrechte tevens evenwichtsrechte is.

2[de] *Geval. De beide wortels r^2 zijn onbestaanbaar.*

De vier wortels r van (26) zijn nu

$$r_1 = u + vi,$$

$$r_2 = -u - vi,$$

$$r_3 = \quad u - vi,$$
$$r_4 = -u + vi.$$

Dienovereenkomstig vindt men volgens (24) en (25)

$$C_1 = A_1 (l + mi),$$
$$C_2 = A_2 (l + mi),$$
$$C_3 = A_3 (l - mi),$$
$$C_4 = A_4 (l - mi),$$

zoodat

$$x = A_1 e^{ut} (\cos vt + i \sin vt) + A_2 e^{-ut} (\cos vt - i \sin vt) +$$
$$+ A_3 e^{ut} (\cos vt - i \sin vt) + A_4 e^{-ut} (\cos vt + i \sin vt),$$

$$y = A_1 (l + mi) e^{ut} (\cos vt + i \sin vt) + A_2 (l + mi) e^{-ut} (\cos vt - i \sin vt) +$$
$$+ A_3 (l - mi) e^{ut} (\cos vt - i \sin vt) + A_4 (l - mi) e^{-ut} (\cos vt + i \sin vt),$$

of na herleiding tot bestaanbare vormen, en invoering van andere constanten

$$x = E_1 e^{ut} \cos (vt + q_1) + E_2 e^{-ut} \cos (vt + q_2), \quad . \; . \; . \quad (31)$$
$$y = E_1 e^{ut} \cos (vt + q_1 + f) + E_2 e^{-ut} \cos (vt + q_2 - f), \quad . \quad (32)$$

waarin E_1, E_2, q_1 en q_2 willekeurige constanten zijn, terwijl u, v en f gevonden worden uit

$$(u^2 + v^2)^2 = ac + p^2, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (33)$$
$$2 (v^2 - u^2) = a + c, \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$
$$\sin f = \frac{2uv}{p}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$
$$\cos f = \frac{a - c}{2p}. \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36)$$

De beweging bestaat dus uit twee componenten, die op te vatten zijn als bewegingen langs een zich gelijkvormig en gelijkstandig vergrootende en verkleinende ellips. (We kunnen u en v positief en $a > c$ onderstellen). Bij *beide bewegingen* blijft de ellips gelijkvormig en gelijkstandig met

$$y^2 + x^2 - 2xy \cos f = \sin^2 f$$

en is de omloopstijd $\frac{2\pi}{v}$.

Nu is f een hoek in het eerste quadraat voor $a > c$ en in het tweede quadrant voor $a < c$, als p positief is. Hieruit blijkt,

dat de zich vergrootende ellips steeds met de rotatiekracht mee, de zich verkleinende ellips tegen de rotatiekracht in wordt doorloopen. Het evenwicht is nu *labiel.*

Van de boven genoemde ellips zijn de assen de deellijnen van den hoek der hoofdassen van het krachtenveld. Is $a > c$, dan is f een hoek in het eerste quadrant, en is de groote as der ellips de deellijn van den hoek der positieve X- en Y-as. Hieruit volgt, *dat de groote as der ellips ligt in de quadranten, beschreven door de hoofdas met kleinsten bijbehoorenden coëfficient, zoo die om O met de rotatiekracht mee naar de andere hoofdas toe draait.*

We kunnen nu de gelijke toegevoegde middellijnen van de ellips (die in dezelfde quadranten liggen als de groote as) als assen van een scheefhoekig coordinatenstelsel kiezen, dat dus een assenhoek f heeft; hierdoor neemt de vergelijking der ellips den vorm aan van die eens cirkels op rechthoekige assen. De krachtcomponenten in de richting dier scheefhoekige assen zijn

$$X^* = -a^*x + p^*y,$$

$$Y^* = -a^*y - p^*x,$$

waarin

$$a^* = \tfrac{1}{2}(a + c),$$

$$p^{*2} = p^2 - \tfrac{1}{4}(a - c)^2$$

of

$$p^* = p \sin f,$$

daar u en v onveranderd blijven, en $\cos f^* = 0$ is. De bewegingsvergelijkingen op de scheefhoekige assen worden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a^*x + p^*y,$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -a^*y - p^*x,$$

waarvan de oplossing is

$$x^* = E_1 e^{ut} \cos(vt + q_1) + E_2 e^{-ut} \cos(vt + q_2),$$

$$x^* = -E_1 e^{ut} \sin(vt + q_1) + E_2 e^{-ut} \sin(vt + q_2).$$

De beweging is ten opzichte der scheefhoekige assen volkomen gelijk aan de beweging ten opzichte der rechthoekige assen voor het geval van een krachtenveld, dat symmetrisch om O is $(a = c)$.

Deze scheefhoekige assen zijn in het geval, dat we nu be-

handelen, bestaanbaar, in het eerste geval echter onbestaanbaar, dus juist omgekeerd als bij de in het eerste geval ingevoerde scheefhoekige assen.

3. *Overgangsgeval. De beide wortels r^2 zijn gelijk.*

Nu is $p = \pm \frac{1}{2}(a - c)$, b.v. $p = \frac{1}{2}(a-c)$ en $r^2_1 = r^2_2 = -\frac{1}{2}(a+c)$. Het triviale geval $p = \frac{1}{2}(a - c) = 0$ uitsluitend, wordt de oplossing van (22) en (23)

$$x = \mathrm{A}e^{rt} + \mathrm{A}'e^{-rt} + \mathrm{B}te^{rt} + \mathrm{B}'te^{-rt},$$

$$y = \mathrm{A}e^{rt} + \mathrm{A}'e^{-rt} + \mathrm{B}\left(t + \frac{2r}{p}\right)e^{rt} + \mathrm{B}'\left(t - \frac{2r}{p}\right)e^{-rt},$$

waarin A, A′, B en B′ willekeurige constanten zijn.

Het evenwicht is dus *labiel*, onafhankelijk van het teeken van r^2.

De beide scheefhoekige coordinatenstelsels, die we in de twee vorige gevallen hebben ingevoerd, hebben in het overgangsgeval een assenhoek nul gekregen, en zijn dus niet te gebruiken. Van beide stelsels zijn beide assen in de rechte $x = y$ samengevallen. Neemt men deze eenige krachtrechte als X-as van een rechthoekig coordinatenstelsel aan, dan worden de bewegingsvergelijkingen

$$\mathrm{X} = r^2x + 2py = \frac{d^2x}{dt^2},$$

$$\mathrm{Y} = r^2y \qquad = \frac{d^2y}{dt^2},$$

dus

$$x = \mathrm{A}e^{rt} + \mathrm{A}'e^{-rt} + \frac{p}{r}\mathrm{C}te^{rt} - \frac{p}{r}\mathrm{C}'te^{-rt},$$

$$y = \qquad \mathrm{C}e^{rt} + \mathrm{C}'e^{-rt}.$$

De beweging bestaat dus uit twee componenten. De eerste beweging is een beweging langs de krachtrechte (X-as), die voor $r^2 > 0$ exponentieel en dus labiel, voor $r^2 < 0$ harmonisch en dus stabiel is. De tweede component der beweging is een exponentieele of harmonische beweging langs de Y-as, gepaard met een daarmee samenhangende beweging langs de X-as, die wegens den factor *t steeds labiel* is.

4. In het bizondere geval $r = 0$ is de eenige krachtrechte

tevens evenwichtsrechte. De oplossing der bewegingsvergelijkingen is nu

$$x = \mathrm{A} + \mathrm{B}t + p\mathrm{C}t^2 + \tfrac{1}{3}p\mathrm{D}t^3,$$

$$y = \mathrm{C} + \mathrm{D}t.$$

De beweging bestaat nu uit een eenparige beweging langs de X-as, en uit een eenparige beweging langs de Y-as vergezeld van een daarmee samenhangende beweging langs de X as; het evenwicht is nu *labiel.*

§ 4. Graphische voorstelling der stabiliteitscondities.

1. Uit de verschillende in § 3 behandelde gevallen ziet men, dat het evenwicht alleen dan stabiel is, als beide wortels r^2 van vergelijking (26) *verschillend, bestaanbaar, niet nul* en *negatief* zijn. Dit is het geval voor

$$(a - c)^2 - 4p^2 > 0,$$

$$ac + p^2 > 0$$

en

$$a + c > 0.$$

2. Het optreden van stabiliteit en labiliteit wordt uit het verloop der krachtlijnen begrijpelijk. In het eerste geval van § 3 wordt n.l. de algemeene vergelijking der krachtlijnen op het ingevoerde scheefhoekige coordinatenstelsel

$$x^{\pm r^2_2} = \mathrm{C}y^{\pm r^2_1}.$$

Hebben r^2_1 en r^2_2 hetzelfde teeken, dan gaan alle krachtlijnen door O, en raken aan die krachtrechte, waarvan de bijbehoorende coëfficient r^2 de kleinste absolute waarde heeft (de andere krachtrechte uitgezonderd). Zijn r^2_1 en r^2_2 positief, dan zijn alle krachtlijnen van O af gericht, en is het evenwicht dus *labiel*; zijn r^2_1 en r^2_2 negatief, dan zijn de krachtlijnen naar O toe gericht, en is het evenwicht *stabiel.*

Hebben r^2_1 en r^2_2 tegengesteld teeken, dan gaat er, behalve de beide krachtrechten, geen enkele krachtlijn door O; de krachtlijnen loopen asymptotisch ten opzichte van beide krachtrechten. De krachtlijnen voeren niet naar O toe, het evenwicht is dus *labiel.*

In het tweede geval van § 3 verkrijgen de krachtlijnen ten op-

zichte van het ingevoerde scheefhoekige coordinatenstelsel dezelfde vergelijking, als voor $a = c$ ten opzichte der hoofdassen, en dus de vergelijking van een logarithmische spiraal. De krachtlijnen loopen dus spiraalvormig om O zonder O te bereiken, en zijn naar O toe gericht, als a^*, en dus ook $a + c$, positief is, en van O af, als $a + c$ negatief is. In beide gevallen wordt het evenwicht labiel, daar de krachtlijnen het materieele punt om O heen doen loopen, en het een steeds toenemend moment van hoeveelheid beweging geven, hetgeen een toenemende centrifugaalkracht tengevolge heeft, die het materieele punt van O af drijft.

3. De voorwaarden voor stabiliteit zijn door een graphische voorstelling toe te lichten, waarop de beoordeelingscommissie mij opmerkzaam gemaakt heeft. Beschouwt men n.l. a en c als de rechthoekige coordinaten van een beeldpunt, en teekent men de krommen $(a - c)^2 - 4p^2 = 0$ (twee evenwijdige rechten), $ac + p^2 = 0$ (gelijkzijdige hyperbool rakend aan die twee rechten) en $a + c = 0$ (rechte gaande door de beide raakpunten en door O), alle gaande door de punten Q $(a = -p,\ c = p)$ en Q′ $(a = p,\ c = -p)$, dan ziet men direct, dat er stabiliteit is, als het beeldpunt ligt in het horizontaal geharceerde gebied, waartoe ook het verticaal en horizontaal geharceerde gerekend moet worden (zie figuur 1). Hierbij zullen we steeds p positief onderstellen. Noemen we de grenskrommen in de opgegeven volgorde 1, 2 en 3, dan dienen ter begrenzing van het stabiele gebied, die deelen van 1 en 2, die getrokken zijn.

Is een der wortels r^2 van (26) negatief, de andere positief, dan is er nog harmonische slingering om het evenwichtspunt langs een krachtrechte mogelijk, als n.l. de coëfficienten der exponentieele beweging nul zijn; deze slingeringen zijn echter kinetisch labiel. Dat deel van het beeldvlak, waar dit geval zich voordoet, zullen we het *half-labiele gebied* noemen. Dit gebied ligt binnen de hyperbool 2. De grens tusschen het half-labiele en labiele gebied is in de figuur zwaar gestippeld, terwijl de overige deelen der grenskrommen licht gestippeld zijn, behalve de rechte 3, die nog een andere beteekenis heeft en daarom gepunt-stippeld is.

Het overgangsgeval van § 3 (twee gelijke wortels r^2) heeft men op de kromme 1. Zooals door een kleine verplaatsing van het beeldpunt direct is in te zien, zijn die gelijke wortels

negatief, als het beeldpunt op het getrokken, en positief als het beeldpunt op het licht-gestippelde deel van 1 ligt; in het eerste geval is het evenwicht half-labiel (daar nog een harmonische slingering langs de eenige krachtrechte mogelijk is).

Op de hyperbool is een der wortels r^2 nul, en is er dus een evenwichtsrechte. De andere wortel r^2 is negatief op het getrokken en positief op het gestippelde deel der kromme; in het eerste geval is een harmonische beweging mogelijk langs die krachtrechte, die geen evenwichtsrechte is, en is het evenwicht dus half-labiel.

In de punten Q en Q′ zijn beide wortels r^2 nul.

Hieruit volgt, *dat de grens van het stabiele gebied half-labiel is.*

Uit (30) ziet men, dat de beeldpunten, waarvoor de hoek tusschen de baanrechten een zelfde waarde ϕ heeft, gelegen zijn op twee rechten evenwijdig aan de grenskromme 1, op afstanden $\frac{p\sqrt{2}}{\cos\phi}$ van O.

Het stabiele gebied bestaat uit twee van elkaar gescheiden gedeelten, één, waarvoor $a > c$ en één, waarvoor $a < c$ is. Daar de aanname, dat $a > c$ is, geen wezenlijke beperking insluit, *is er dus slechts één algemeen geval van stabiliteit.*

4. Om na te gaan, hoe de stabiliteit of labiliteit in een krachtenveld met potentiaalfunctie door de rotatiekracht gewijzigd wordt, is het stabiele gebied, voor het geval de rotatiekracht ontbreekt ($p = 0$), aangegeven door een verticale harceering. *De niet-geharceerde velden zijn nu zonder en met rotatiekracht labiel, terwijl de dubbel-geharceerde velden in beide gevallen stabiel zijn. Bij de enkel-geharceerde velden geeft een horizontale harceering het geval aan van labiel evenwicht zonder rotatiekracht, dat door de rotatiekracht stabiel wordt, een verticale harceering het geval van stabiel evenwicht zonder rotatiekracht, dat door de rotatiekracht labiel wordt.* (Hierbij niet te letten op de schuine harceering).

Vergroot men de rotiekracht, dus p, dan verandert de figuur evenredig, waarbij de punten Q en Q′ de rechte 3 ($a + c = 0$) doorloopen. Hieruit volgt, dat de stabiele gebieden voor alle waarden van p te zamen die helft van het beeldvlak beslaan, die rechts van (niet op) de lijn $a + c = 0$ gelegen is; daarentegen beslaan alle labiele gebieden te zamen het geheele

beeldvlak. *De rechte* 3 *is dus de grens tusschen die gevallen, waarbij het evenwicht wel, en waarbij het evenwicht niet door de rotatiekracht stabiel gemaakt kan worden*, en is daarom in figuur 1 gepunt-stippeld. *Steeds kan echter het evenwicht door de rotatiekracht labiel gemaakt worden.*

We krijgen nu de volgende drie gevallen:

1ste. $a + c \leq 0$. Het evenwicht is voor iedere rotatiekracht labiel.

2de. $a \geq 0$ en $c \geq 0$. Het evenwicht is alleen stabiel, als $\text{VA}\,p < \text{VA}\,\frac{a-c}{2}$ is (VA = valeur absolue). (Voor $a = c$ is het evenwicht ook nog stabiel vor $\text{VA}p = \text{VA}\,\frac{a-c}{2} = 0$).

3de. $a > 0$ en $-a < c \leq 0$. Voor $p = 0$ is het evenwicht labiel. Bij vergrooting van p strijkt het stabiele gebied over het beeldpunt heen, om het daarna weer te verlaten. Er is dus alleen stabiel evenwicht, als p tusschen twee waarden ligt, en wel, zooals men uit de stabiliteitscondities vindt, als

$$\sqrt{-ac} < \text{VA}\,p < \frac{a-c}{2}$$

is, dus als de absolute waarde van p tusschen het geometrisch en het arithmetisch gemiddelde van de absolute waarden van a en c in ligt.

HET KRACHTENVELD HEEFT EEN POTENTIAALFUNCTIE.

§ 5. Discussie der algemeene gevallen.

1. Van nu af aan zullen we ons, als het tegendeel niet vermeld is, beperken tot het geval, dat er een potentiaalfunctie V is (dus $p = 0$), maar nu ook aannemen, dat het veld niet in rust is (dus $\omega \neq 0$).

Dan is

$$X = -\frac{dV}{dx},$$

$$Y = -\frac{dV}{dy},$$

zoodat de bewegingsvergelijkingen worden

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dV}{dx} - 2\omega\frac{dy}{dt} + \omega^2 x, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dV}{dy} + 2\omega\frac{dx}{dt} + \omega^2 y. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

Door (37) met $\frac{dx}{dt}$ en (38) met $\frac{dy}{dt}$ te vermenigvuldigen en op te tellen, leidt men hieruit de volgende eerste integraal af

$$\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\} + V - \tfrac{1}{2}\omega^2(x^2+y^2) = \text{constant}. \ldots (39)$$

Dit drukt uit, *dat de som van de levende kracht der relatieve beweging, de potentiaal van het krachtenveld, en de potentiaal der centrifugaalkracht constant is.*

Op de vaste assen wordt de eerste integraal

$$\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx'}{dt} - \omega y'\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt} + \omega x'\right)^2\right\} + V - \tfrac{1}{2}\omega^2(x'^2+y'^2) = \text{constant},$$

of

$$\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy'}{dt}\right)^2\right\} - 2\omega s + V = \text{constant},$$

waarin $s = \tfrac{1}{2}\left(y'\frac{dx'}{dt} - x'\frac{dy'}{dt}\right)$ de sectorsnelheid voorstelt.

2. De vergelijkingen (17), (18), (19), (20) en (21) worden nu

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\frac{dy}{dt} - (a-\omega^2)\,x, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \quad 2\omega\frac{dx}{dt} - (c-\omega^2)\,y, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

$$(r^2 + a - \omega^2)\,A = -2\omega r C, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

$$2\omega r A = (r^2 + c - \omega^2)\,C, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

$$r^4 + (2\omega^2 + a + c)\,r^2 + (a-\omega^2)(c-\omega^2) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (44)$$

waaruit

$$r^2 = -\tfrac{1}{2}(2\omega^2 + a + c) \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2 + 8\omega^2(a+c)}. \quad . \quad . \quad (45)$$

3 We hebben nu twee gevallen te onderscheiden:

1ste *Geval. De beide wortels r^2 zyn bestaanbaar.*

Eén wortel r^2, in het bizonder beschouwd, kan nu nog positief of negatief zijn, zoodat we onderscheiden:

A. $r^2 = r_1^2$ *(r_1 bestaanbaar en positief) is een positieve wortel van* (44).

De waarden van A en C, behoorend bij $r = r_1$, noemen we A_1 en C_1; die behoorend bij $r = -r_1$ A'_1 en C'_1.

Voor $\frac{C_1}{A_1}$ vindt men een bestaanbare waarde l_1, zoodat $C_1 = A_1 l_1$ is, terwijl dan $C'_1 = -A'_1 l_1$ is. Deze wortel r^2 levert dus de volgende bijdragen tot x en y

$$x = A_1 e^{r_1 t} + A'_1 e^{-r_1 t} + \ldots\ldots, \quad \ldots (46)$$

$$y = A_1 l_1 e^{r_1 t} - A'_1 l_1 e^{-r_1 t} + \ldots\ldots, \quad \ldots (47)$$

waarin A_1 en A'_1 willekeurige constanten zijn. Het evenwicht is nu *labiel.*

B. $r^2 = -v^2_1$ *(v_1 bestaanbaar en positief) is een negatieve wortel van* (44).

Voor $\frac{C_1}{A_1}$ (behoorend bij $r = v_1 i$) vindt men een zuiver imaginaire waarde $m_1 i$, zoodat $C_1 = A_1 m_1 i$ is, terwijl dan $C'_1 = -A'_1 m_1 i$ is. Dit levert de volgende bijdragen tot x en y

$$x = A_1 e^{v_1 it} + A'_1 e^{-v_1 it} + \ldots,$$

$$y = A_1 i m_1 e^{v_1 it} - A'_1 i m_1 e^{-v_1 it} + \ldots,$$

of na herleiding tot bestaanbare vormen, en invoering van andere constanten

$$x = E_1 \cos(v_1 t + q_1) + \ldots, \quad \ldots (48)$$

$$y = F_1 \sin(v_1 t + q_1) + \ldots, \quad \ldots (49)$$

waarin q_1 willekeurig is, en v_1 en de verhouding $E_1 : F_1$ gevonden worden uit

$$v^4 - v^2(2\omega^2 + a + c) + (a - \omega^2)(c - \omega^2), \ldots (50)$$

$$v^2 = \tfrac{1}{2}(2\omega^2 + a + c) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2 + 8\omega^2(a+c)}, \ldots (51)$$

$$E_1(v_1^2 + \omega^2 - a) - 2\omega v_1 F_1 = 0, \ldots (52)$$

$$-2\omega v_1 E_1 + F_1(v_1^2 + \omega^2 - c) = 0. \ldots (53)$$

Het evenwicht is, wat dien eenen wortel r^2 aangaat, *stabiel.*

2de *Geval. Beide wortels r^2 zijn onbestaanbaar.*

De vier wortels r zijn nu

$$r_1 = u + vi,$$
$$r_2 = -u - vi,$$
$$r_3 = u - vi,$$
$$r_4 = -u + vi,$$

waarin we u en v positief kunnen onderstellen. Dien overeenkomstig vindt men

$$C_1 = A_1(l + mi),$$
$$C_2 = -A_2(l + mi),$$
$$C_3 = A_3(l - mi),$$
$$C_4 = -A_4(l - mi),$$

zoodat dus:

$$x = A_1 e^{ut}(\cos vt + i \sin vt) + A_2 e^{-ut}(\cos vt - i \sin vt) + \\ + A_3 e^{ut}(\cos vt - i \sin vt) + A_4 e^{-ut}(\cos vt + i \sin vt),$$

$$y = A_1(l + mi) e^{ut}(\cos vt + i \sin vt) - A_2(l + mi) e^{-ut}(\cos vt - i \sin vt) + \\ + A_3(l - mi) e^{ut}(\cos vt - i \sin vt) - A_4(l - mi) e^{-ut}(\cos vt + i \sin vt),$$

of na herleiding tot bestaanbare vormen, met invoering van andere constanten

$$x = E_1 e^{ut} \cos(vt + q_1) + E_2 e^{-ut} \cos(vt + q_2), \quad \ldots \quad (54)$$

$$y = kE_1 e^{ut} \cos(vt + q_1 + f) - kE_2 e^{-ut} \cos(vt + q_2 - f), \ldots (55)$$

waarin E_1, E_2, q_1 en q_2 willekeurig zijn, en u, v, k en f gevonden worden uit

$$(u^2 + v^2)^2 = (a - \omega)^2 (c - \omega^2), \quad \ldots \quad (56)$$

$$2(v^2 - u^2) = 2\omega^2 + a + c, \quad \ldots \quad (57)$$

$$k = \sqrt[4]{\frac{a - \omega^2}{c - \omega^2}}, \quad \ldots \quad (58)$$

$$\sin f = -\frac{v(1 + k^2)}{2\omega k}, \quad \ldots \quad (59)$$

$$\cos f = -\frac{u(1 - k^2)}{2\omega k}. \quad \ldots \quad (60)$$

Het evenwicht is nu *labiel*.

§ 6. Overgangsgevallen.

Tusschen de behandelde algemeene gevallen heeft men nog de volgende drie overgangsgevallen.

1ste *Overgangsgeval. Een der wortels r^2 is nul.*

Dit geval, dat een overgang is tusschen het eerste geval A en B van § 5, doet zich voor, als $(a - \omega^2)(c - \omega^2) = 0$ is, bv. voor $\omega^2 = c$. De andere wortel $r_2^2 = -(a + 3c)$ kan dan nog positief of negatief zijn. De wortel $r_1^2 = 0$ levert de volgende bijdragen tot x en y

$$x = C + \ldots,$$

$$y = \tfrac{1}{2}\frac{c - a}{\omega} Ct + D + \ldots,$$

waarin C en D willekeurig zijn. Het evenwicht is dus, wat dien wortel $r_1^2 = 0$ aangaat, *labiel*, behalve voor $a = c$.

2de *Overgangsgeval. Beide wortels r^2 zijn gelijk.*

Dit is het geval voor

$$\omega^2 = -\frac{(a - c)^2}{8(a + c)}.$$

Beide wortels zijn nu

$$r^2 = -\tfrac{1}{2}(2\omega^2 + a + c) = -\frac{(a + 3c)(3a + c)}{8(a + c)} = r_1^2,$$

waarin we r_1 positief kunnen onderstellen. Men kan nu aan de bewegingsvergelijkingen voldoen door

$$x = Ae^{r_1 t} + Ete^{r_1 t},$$
$$y = Ce^{r_1 t} + Fte^{r_1 t},$$

waarin A, C, E en F voldoen aan

$$(r_1^2 + a - \omega^2)E = -2\omega r_1 F,$$
$$2\omega r_1 E = (r_1^2 + c - \omega^2)F,$$
$$(r_1^2 + a - \omega^2)A = -2\omega r_1 C - 2\omega F - 2r_1 E,$$
$$(r_1^2 + c - \omega^2)C = 2\omega r_1 A + 2\omega E - 2r_1 F,$$

zoodat

$$F = Ek,$$

$$C = Ak + Ek\frac{a - c}{4\omega^2 r_1},$$

waarin

$$k = -\frac{r_1^2 + a - \omega^2}{2\omega r_1} = \frac{2\omega r_1}{r_1^2 + c - \omega^2} = \sqrt{\frac{3a+c}{a+3c}}.$$

Voor $r = -r_1$ vindt men evenzoo

$$F' = -E'k,$$

$$C' = -A'k + E'k\frac{a-c}{4\omega^2 r_1},$$

zoodat men voor x en y vindt

$$x = Ae^{r_1 t} + A'e^{-r_1 t} + Ete^{r_1 t} + E'te^{-r_1 t},$$

$$y = Ake^{r_1 t} - A'ke^{-r_1 t} + Ek\left(t + \frac{a-c}{4\omega^2 r_1}\right)e^{r_1 t} + E'k\left(-t + \frac{a-c}{4\omega^2 r_1}\right)e^{-r_1 t},$$

waarin A, A′, E en E′ willekeurige constanten zijn. Is r_1^2 negatief, dus $r_1 = v_1 i$, dan wordt $k = mi$, waarin v_1 bestaanbaar en positief, en m bestaanbaar is. De oplossing kan dan herleid worden tot

$$x = G\cos(v_1 t + q_1) + Ht\cos(v_1 t + q_2),$$

$$y = -mG\sin(v_1 t + q_1) - mHt\sin(v_1 t + q_2) +$$

$$+ m\frac{a-c}{4\omega^2 r_1} H\cos(v_1 t + q_2),$$

waarin G, H, q_1 en q_2 willekeurig zijn, en

$$m = \frac{a - \omega^2 - v_1^2}{2\omega v_1} = \frac{2\omega v_1}{c - \omega^2 - v_1^2} = \sqrt{-\frac{3a+c}{a+3c}}.$$

Zoowel voor r_1^2 positief als negatief is het evenwicht *labiel*.

3de *Overgangsgeval. Beide wortels r^2 zijn nul.*

Nu is volgens (44)

$$(a - \omega^2)(c - \omega^2) = 0,$$

$$2\omega^2 + a + c = 0,$$

dus bv.

$$c = \omega^2,$$

$$a = -3\omega^2.$$

De oplossing der bewegingsvergelijkingen is nu

$$x = A\,.\,3\omega t^2 + Bt + C,$$

$$y = A\,(2\omega^2 t^3 - 3t) + B\omega t^2 + C\,.\,2\omega t + D,$$

waarin A, B, C en D willekeurig zijn. Het evenwicht is nu *labiel.*

§ 7. Graphische voorstelling der stabiliteitscondities.

1. Uit de in § 5 en 6 behandelde gevallen, ziet men, dat het evenwicht alleen stabiel is, als beide wortels r^2 van (44) *verschillend*, *bestaanbaar*, *niet nul* en *negatief* zijn. In de overgangsgevallen is het evenwicht labiel, behalve als in het eerste overgangsgeval van § 6 $\omega^2 = a = c$ is, dus $r_1^2 = 0$, $r_2^2 = -4\omega^2$ is, in welk geval het evenwicht stabiel is.

De stabiliteitsvoorwaarden zijn dus

$$(a - c)^2 + 8\omega^2 (a + c) > 0,$$

$$(a - \omega^2)(c - \omega^2) > 0,$$

$$2\omega^2 + a + c > 0.$$

Ook deze voorwaarden kunnen door een graphische voorstelling worden toegelicht, door a en c als de coordinaten van een beeldpunt te beschouwen. Teekent men de krommen $(a - c)^2 + 8\omega^2 (a + c) = 0$ (parabool door den oorsprong O), $(a - \omega^2)(c - \omega^2) = 0$ (twee rechten evenwijdig aan de c- en a-as, rakend aan de parabool) en $2\omega^2 + a + c = 0$ (verbindingsrechte der raakpunten), alle gaande door de punten Q ($a = -3\omega^2$, $c = \omega^2$) en Q′ ($a = \omega^2$, $c = -3\omega^2$), welke krommen we 1, 2 en 3 zullen noemen, dan is er stabiliteit, als het beeldpunt ligt in het horizontaal gearceerde gebied, het dubbel gearceerde gebied meegerekend (zie figuur 2).

We spreken verder weer van het *half-labiele gebied*, als er nog harmonische slingeringen om het evenwichtspunt mogelijk zijn, die kinetisch labiel zijn. Dit geval doet zich voor, als één der wortels r^2 van (44) negatief, de andere positief is. Het half-labiele gebied bestaat uit de velden, waar $a < \omega^2$ en $c > \omega^2$ is, of omgekeerd.

Tot begrenzing van het stabiele gebied dienen de getrokken deelen van 1 en 2; de overige deelen van 2, die tot begrenzing van het half-labiele gebied dienen, zijn zwaar gestippeld,

terwijl de rest van 1 en de geheele kromme 3 licht gestippeld zijn. *Op de grens van het stabiele gebied is het evenwicht overal half-labiel, behalve in het punt $S(a = c = \omega^2)$, waar het evenwicht stabiel is.*

Het eerste overgangsgeval van § 6 heeft men op de kromme 2. Die wortel r^2, die niet nul is, is negatief op het getrokken, positief op het gestippelde deel van 2 (zooals weer door een kleine verplaatsing van het beeldpunt is in te zien).

Het tweede overgangsgeval heeft men op de parabool 1. De gelijke wortels r^2 zijn negatief, als het beeldpunt op het getrokken, positief als het beeldpunt op het gestippelde deel van 1 ligt.

Het derde overgangsgeval heeft men in de punten Q en Q'.

Het stabiele gebied bestaat uit twee gedeelten, die in het punt $S(a = c = \omega^2)$ samenhangen. *Men heeft dus slechts twee verschillende gevallen van stabiliteit*, die we het eerste en het tweede geval zullen noemen. Het *eerste geval van stabiliteit* heeft men, als a en c beide grooter dan ω^2 zijn, of wil men liever, ω^2 kleiner dan a en dan c is; het *tweede geval van stabiliteit* heeft men als a en c beide tusschen ω^2 en $-3\omega^2$ gelegen zijn, of wat hetzelfde is, als ω^2 de grootste der vier waarden a, c, $-\frac{1}{3}a$ en $-\frac{1}{3}c$ overtreft, en bovendien $(a-c)^2 + 8\omega^2(a+c) > 0$ is. Er is o. a. steeds labiliteit als ω^2 tusschen a en c in ligt.

2. Uit de eerste integraal (39) is het bestaan van het eerste geval van stabiliteit gemakkelijk te voorzien. Lettend op (16) wordt (39) n.l.

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + (a - \omega^2)\,x^2 + (c - \omega^2)\,y^2 = \text{constant}.$$

Is nu $a > \omega^2$ en $c > \omega^2$, dan zal bij een kleine evenwichtsverstoring deze constante een kleine waarde moeten hebben, zoodat x en y klein blijven, en het evenwicht dus stabiel is. De overige gevallen van stabiliteit en labiliteit heb ik niet op een dergelijke wijze kunnen verklaren.

3. Om na te gaan, hoe de stabiliteit of labiliteit van een rustend krachtenveld door de rotatie gewijzigd wordt, is het stabiele gebied voor het rustend krachtenveld door een verticale harceering aangegeven. *De niet geharceerde velden zijn bij rust*

en bij rotatie labiel; de dubbel geharceerde velden in beide gevallen stabiel. Bij de enkel geharceerde velden geeft een horizontale harceering het geval aan van labiel evenwicht in een rustend krachtenveld, dat door de rotatie stabiel wordt; een verticale harceering het geval van stabiel evenwicht bij rust, dat door de rotatie labiel wordt.

Wordt de rotatiesnelheid ω vergroot, dan verandert de figuur evenredig, waarbij Q de helft der rechte OQ ($a + 3c = 0$) beschrijft, en Q′ de helft der rechte OQ′ ($3a + c = 0$). *Deze lijnen*, die in figuur 2 gepunt-stippeld zijn, *geven de grens aan tusschen het gebied, waar voor iedere waarde van* ω *het evenwicht labiel is* (in den uitspringenden hoek gelegen, inclusief de grenslijnen OQ en OQ′), *en het gebied, waar* ω *zoo gekozen kan worden, dat het evenwicht stabiel wordt* (in den inspringenden hoek gelegen). Het laatstgenoemde gebied wordt gevormd door alle stabiele gebieden te zamen voor de verschillende waarden van ω. Alle labiele gebieden te zamen vormen het geheele beeldvlak, uitgezonderd het deel der rechte OA rechts van O (de meetkundige plaats van A). *Voor alle waarden van a en c kan dus de rotatiesnelheid zoodanig zijn, dat het evenwicht labiel wordt, behalve voor* $a = c > 0$; *in het laatste geval is voor iedere rotatiesnelheid het evenwicht stabiel*, zooals ook direct daaraan is in te zien, dat voor $a = c$ het krachtenveld symmetrisch om O is, en dus een rotatie om O geen invloed uitoefent op de beweging ten opzichte der vaste assen.

4. Men kan uit de verandering der graphische voorstelling bij verandering van ω gemakkelijk afleiden, voor welke waarden van ω in de verschillende gevallen het evenwicht stabiel en labiel is, waarbij we $a \geq c$ mogen onderstellen. Men krijgt nu de volgende 5 gevallen.

1ste $a = c > 0$. Het evenwicht is steeds stabiel. Voor $\omega^2 < a$ verkeeren we in het eerste, voor $\omega^2 > a$ in het tweede geval van stabiliteit.

2de $a > c > 0$. Het evenwicht is stabiel, behalve als $a \geq \omega^2 \geq c$ is. Is n.l. het krachtenveld in rust, dan heeft men het eerste geval van stabiliteit; neemt ω toe, dan verlaat het eerste stabiele gebied (behoorend bij het eerste stabiliteitsgeval) het beeldpunt, en wordt dus het evenwicht labiel, op het oogenblik, dat $\omega^2 = c$ is; is nu $\omega^2 = a$ geworden, dan

bereikt het tweede stabiele gebied het beeldpunt, dat nu verder in het stabiele gebied blijft. Bij een snel roteerend krachtenveld is dus het evenwicht stabiel.

3^{de} $-a \leq c \leq 0$. Bij een rustend veld is nu het evenwicht labiel. Neemt O toe, dan bereikt het tweede stabiele gebied het beeldpunt, als $\omega^2 = a$ geworden is, waarna het beeldpunt in het stabiele gebied blijft. Het evenwicht is dus stabiel voor $\omega^2 > a$, en dus ook bij een snel roteerend veld.

4^{de} $-3a < c < -a < 0$. Bij een rustend veld is het evenwicht labiel. Voor $\omega^2 = -\dfrac{(a-c)^2}{8(a+c)}$ bereikt het tweede stabiele gebied het beeldpunt, om het voor $\omega^2 = a$ weer te verlaten, zoodat bij snelle rotatie het evenwicht weer labiel is. Het evenwicht is alleen stabiel, voor

$$-\frac{(a-c)^2}{8(a+c)} > \omega^2 > a.$$

5^{de} $c \leq -3a$. Het beeldpunt ligt nu op of binnen den uitspringenden hoek QOQ', zoodat het evenwicht voor iedere rotatie labiel is.

Uit deze verschillende gevallen, ziet men, *dat bij een snel roteerend krachtenveld het evenwicht stabiel is voor* $a + c \geq c$, *en labiel voor* $a + c < 0$, een resultaat, dat we in Hoofdstuk II § 7 langs anderen weg zullen terug vinden.

TWEEDE HOOFDSTUK.

Banen beschreven in het stabiele geval.

§ 1. Banen op het roteerende vlak.

1. In het stabiele geval zijn beide wortels v^2 van (50) bestaanbaar en positief. Ieder dier wortels v^2 geeft een beweging ten opzichte van het roteerende vlak voorgesteld door (48) en (49). Zijn v_1^2 en v_2^2 de beide wortels v^2, en is $v_1^2 > v_2^2$, dan zullen we de beweging behoorend bij $v^2 = v_1^2$ ten opzichte van het roteerende vlak de *eerste relatieve beweging* noemen, die behoorend bij $v^2 = v_2^2$ de *tweede relatieve beweging*. Ieder dier bewegingen, die wat amplitudo en phase aangaat van elkaar onafhankelijk zijn, zullen we afzonderlijk onderzoeken.

De baan van de eerste relatieve beweging vindt men door t uit (48) en (49) te elimineeren, en is dus

$$\frac{x^2}{E_1^2} + \frac{y^2}{F_1^2} = 1,$$

d. i. een ellips met de hoofdassen van het krachtenveld tot assen. De vorm van de baan, de omloopszin en omloopstijd $\left(T_1 = \frac{2\pi}{v_1}\right)$ worden gevonden uit (51), (52) en (53), terwijl grootte en phase willekeurig zijn. Evenzoo voor de tweede relatieve beweging; deze heeft een grooteren omloopstijd dan de eerste beweging.

We kunnen zonder beperking $a \geq c$ en v_1, v_2 en ω alle positief onderstellen. Uit (51) volgt nu:

$$v^2 + \omega^2 - c = \tfrac{1}{2}(4\omega^2 + a - c) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(a-c)^2 + 8\omega^2(a+c)},$$

zoodat $v_1^2 + \omega^2 - c$ steeds positief is, en dus volgens (53) E_1 en F_1 hetzelfde teeken hebben. Uit (48) en (49) volgt nu, dat de eerste beweging in negatieven zin, d. w. z. tegen de rotatie van het veld in, wordt uitgevoerd. Daarentegen is $v_2^2 + \omega^2 - c$ slechts positief, als

$$(4\omega^2 + a - c)^2 > (a-c)^2 + 8\omega^2(a+c)$$

of

$$\omega^2 > c,$$

en dus, daar ω^2 in het stabiele geval niet tusschen a en c in kan liggen, ook $\omega^2 > a$ is. In verband met (53) volgt daaruit, dat E_2 en F_2 hetzelfde teeken hebben, en dus de ellips tegen de rotatie van het veld in doorloopen wordt, in het tweede stabiliteitsgeval (zie hoofdstuk I § 7); E_2 en F_2 hebben tegengesteld teeken in het eerste stabiliteitsgeval, zoodat dan de ellips met de rotatie mee wordt doorloopen. Hieruit volgt:

In het eerste stabiliteitsgeval wordt de snelst doorloopen ellips (eerste relatieve beweging) tegen de rotatie van het veld in, de langzaamst doorloopen ellips (tweede relatieve beweging) met die rotatie mee doorloopen; in het tweede stabiliteitsgeval worden beide ellipsen tegen de rotatie van het veld in doorloopen.

Bevindt het beeldpunt zich in S ($a = c = \omega^2$), dan is $v_1 = 2\,\omega$, $v_2 = 0$, $E_1 = F_1$, terwijl E_2 en F_2 willekeurig zijn, dus

$$x = E_1 \cos(2\omega t + q_1) + E_2,$$

$$y = E_1 \sin(2\omega t + q_1) + F_2,$$

waarin E_1, E_2, F_2 en q_1 willekeurig zijn. De eerste beweging is nu cirkelvormig, met O als middelpunt; de tweede relatieve beweging is rust. De totale relatieve beweging is dus cirkelvormig met een willekeurig gelegen middelpunt, met de constante hoeksnelheid 2ω tegen de rotatie van het veld in doorloopen.

In het half-labiele geval ($v_1^2 > 0 > v_2^2$, zie Hoofdstuk I, § 7) is de tweede relatieve beweging exponentieel geworden; de eerste is elliptisch gebleven, doorloopen tegen de rotatie van het veld in.

Om na te gaan, welke de groote as van de ellips is, herleiden we (52) en (53) door optelling en aftrekking tot:

$$E\{(v-\omega)^2 - a\} + F\{(v-\omega)^2 - c\} = 0, \quad \ldots\ldots (61)$$

$$E\{(v+\omega)^2 - a\} - F\{(v+\omega)^2 - c\} = 0. \quad \ldots\ldots (62)$$

Hieruit ziet men, dat de vier grootheden $(v-\omega)^2-a$, $(v-\omega)^2-c$, $(v+\omega)^2-a$ en $(v+\omega)^2-c$ niet alle hetzelfde teeken kunnen hebben, zoodat de grootste $(v+\omega)^2-c$ (in de onderstellingen $\omega > 0$ en $a > c$) steeds positief, en de kleinste $(v-\omega)^2-a$ steeds negatief is, terwijl $(v-\omega)^2-c$ en $(v+\omega)^2-a$ hetzelfde teeken hebben. In verband hiermee ziet men, als E en F hetzelfde teeken hebben, uit (62) direct, dat VA E > VA F, en als E en F tegengesteld teeken hebben, uit (61), dat VA E < VA F is (VA = Valeur absolue).

Hieruit volgt, *dat de groote as van de ellips langs de hoofdas van het krachtenveld met den grootsten bijbehoorenden coëfficient valt, als de ellips tegen de rotatie van het veld in doorloopen wordt, en langs de hoofdas met den kleinsten coëfficient, als de ellips met die rotatie mee wordt doorloopen.*

Zijn de coëfficienten van beide hoofdassen gelijk, dus $a = c$, dan worden beide ellipsen cirkels met hoeksnelheden $\omega + \sqrt{a}$ en $\omega - \sqrt{a}$ (positief gerekend tegen de rotatie van het veld in) doorloopen.

2. De vergelijkingen (48) en (49) kunnen geschreven worden in de vormen

$$x = G_1 \cos(v_1 t + q_1) + H_1 \cos(v_1 t + q_1) + \ldots, \quad \ldots (63)$$

$$y = G_1 \sin(v_1 t + q_1) - H_1 \sin(v_1 t + q_1) + \ldots, \quad \ldots (64)$$

waarin

$$G_1 = \tfrac{1}{2}(E_1 + F_1),$$

$$H_1 = \tfrac{1}{2}(E_1 - F_1).$$

Tusschen G_1 en H_1 bestaan de van elkaar afhankelijke betrekkingen

$$G_1 \{(v_1 - \omega)^2 - a\} + H_1 \{(v_1 + \omega)^2 - a\} = 0, \quad \ldots (65)$$

$$G_1 \{(v_1 - \omega)^2 - c\} - H_1 \{(v_1 + \omega)^2 - c\} = 0, \quad \ldots (66)$$

die men uit (52) en (53) afleidt door de substitutie $E_1 = G_1 + H_1$, $F_1 = G_1 - H_1$. Door optelling en aftrekking leidt men uit (65) en (66) nog af:

$$G_1 \{2(v_1 - \omega)^2 - (a + c)\} - H_1 (a - c) = 0, \quad \ldots (67)$$

$$- G_1 (a - c) + H_1 \{2(v_1 + \omega)^2 - (a + c)\} = 0. \quad \ldots (68)$$

Volgens (63) en (64) *is de beweging op het roteerende vlak, voor zoo ver den wortel $v^2 = v_1^2$ aangaat, ook op te vatten als de resultante van twee eenparige cirkelbewegingen, tusschen wier stralen G_1 en H_1 een bepaalde verhouding bestaat, en met dezelfde hoeksnelheid v_1, de eerste tegen de rotatie van het veld in, de tweede met die rotatie mee doorloopen.* Deze bewegingen zullen we de *eerste* en de *tweede cirkelbeweging* noemen. De diagonaal van het parallelogram op de voerstralen van beide cirkelbewegingen is nu de voerstraal van de boven beschreven elliptische beweging. De voerstralen der beide cirkelbewegingen liggen steeds (afgezien van hun grootte) symmetrisch ten opzichte van die hoofdas van het krachtenveld, waarlangs de groote as van de ellips valt; dit is de X-as als G_1 en H_1 hetzelfde teeken, en de Y-as als G_1 en H_1 tegengesteld teeken hebben. De ellips wordt tegen de rotatie van het veld in doorloopen, als VA $G_1 >$ VA H_1, en met de rotatie van het veld mee, als VA $G_1 <$ VA H_1 is. Volgens (67) en (68) is alleen dan de straal van een der cirkelbewegingen nul voor $a = c$; de elliptische beweging gaat dan in de overblijvende cirkelbeweging over, zooals ook boven gevonden is.

§ 2. Banen op het vaste vlak.

1. Uit de laatste opvatting van de eerste (of tweede) relatieve beweging, n.l. als de resultante van twee cirkelbewegingen, kan men gemakkelijk nagaan, hoe de baan van de eerste beweging zich op het vaste vlak zal afteekenen. Van beide cirkelbewegingen wordt n.l. bij overgang van het roteerende op het vaste vlak de rotatiesnelheid algebraïsch met ω vermeerderd. De beweging ten opzichte der vaste assen wordt dus voorgesteld door

$$x' = G_1 \cos\{(v_1 - \omega)t + q_1\} + H_1 \cos\{(v_1 + \omega)t + q_1\} + \ldots, \quad (69)$$

$$y' = G_1 \sin\{(v_1 - \omega)t + q_1\} - H_1 \sin\{(v_1 + \omega)t + q_1\} + \ldots. \quad (70)$$

Deze vergelijkingen kan men ook afleiden door rechtstreeksche oplossing der bewegingsvergelijkingen op de vaste assen, t. w.

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = X' = -\tfrac{1}{2}\{(a+c)+(a-c)\cos 2\omega t\}x' + \tfrac{1}{2}(a-c)y'\sin 2\omega t, \quad (71)$$

$$\frac{d^2y'}{dt^2} = Y' = \tfrac{1}{2}(a-c)x'\sin 2\omega t - \tfrac{1}{2}\{(a+c)-(a-c)\cos 2\omega t\}y'. \quad (72)$$

De betrekking tusschen G_1 en H_1 vindt men dan in den vorm der vergelijkingen (67) en (68).

Volgens (69) en (70) *is de beweging ten opzichte van het vaste vlak*, voor zoo ver den éénen wortel $v^2 = v_1^2$ van (50) aangaat, *op te vatten als de resultante van twee eenparige cirkelbewegingen met stralen G_1 en H_1 en hoeksnelheden $\omega - v_1$ en $\omega + v_1$*, positief gerekend met de rotatie van het veld mee, terwijl de phase zoodanig is, dat de beide voerstralen steeds symmetrisch liggen ten opzichte van een der draaiende hoofdassen van het veld. Beide cirkelbewegingen zullen we als de *langzame* en de *snelle cirkelbeweging* onderscheiden. Twee dergelijke cirkelbewegingen levert ons de wortel $v^2 = v_2^2$.

Om de baan tengevolge van twee bijeenbehoorende cirkelbewegingen te construeeren, teekenen we de voerstralen dier cirkelbewegingen op verschillende tijdstippen, en construeeren op ieder paar bijeenbehoorende voerstralen een parallelogram. Op deze wijze zijn de figuren 3 — 10 geconstrueerd. We kunnen hierbij uitgaan van een tijdstip, waarop de voerstralen in denzelfden zin langs elkaar vallen, om te eindigen op het eerst-

volgende tijdstip, waarop ze in tegengestelden zin langs elkaar vallen. Begin- en eindpunt zoo verkregen noemen we *apocentrum* (met maximalen voerstraal) en *pericentrum* (met minimalen voerstraal). De voerstralen van apo- en pericentrum zijn de halve groote en kleine as van de ellips van § 1.

Van apocentrum tot pericentrum neemt de voerstraal voortdurend af (daar de diagonaal van een parallelogram afneemt als de hoek in de eindpunten van de diagonaal toeneemt). *De voortzetting der baankromme vindt men door spiegeling ten opzichte van de voerstralen door apo- en pericentrum.* In het algemeen, n.l. als $v_1 - \omega$ en $v_1 + \omega$, of wat op hetzelfde neerkomt, als v_1 en ω onderling onmeetbaar zijn, krijgt men zoo een kromme, die niet in zichzelf weer keert, en dus *niet algebraïsch is; zijn v_1 en ω onderling meetbaar, dan geeft de eliminatie van t uit* (69) *en* (70) *een algebraïsche vergelijking in x' en y', en de baankromme keert na een zeker aantal omloopen in zichzelf weer.*

2. Uit de voorgaande beschouwingen ziet men, dat de phaseconstante q_1 geen invloed heeft op den vorm van de baan. Is het ons alleen om den vorm te doen, dan kunnen we $q_1 = 0$ stellen, en onderstellen, dat G_1 en H_1 beide positief zijn, d. w. z. dat op het tijdstip $t = 0$ de voerstralen van beide cirkelbewegingen langs de positieve X — *as* vallen. Hierdoor worden (69) en (70)

$$x' = G\cos(v - \omega)t + H\cos(v + \omega)t, \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

$$y' = G\sin(v - \omega)t - H\sin(v + \omega)t, \quad . \quad . \quad . \quad (74)$$

waarbij de index is weggelaten, om aan te geven, dat deze zoowel 1 als 2 zijn kan.

Uit (73) en (74) leidt men af

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{-G(v-\omega)\cos(v-\omega)t + H(v+\omega)\cos(v+\omega)t}{G(v-\omega)\sin(v-\omega)t + H(v+\omega)\sin(v+\omega)t}, \quad . \quad . \quad (75)$$

$$\frac{d^2y'}{dx'^2} = -\frac{G^2(v-\omega)^3 - H^2(v+\omega)^3 + 2GH(v^2-\omega^2)\omega\cos 2vt}{\{G(v-\omega)\sin(v-\omega)t + H(v+\omega)\sin(v+\omega)t\}^3}. \quad . \quad . \quad (76)$$

De conditie, dat in een punt der baankromme de raaklijn door het evenwichtspunt O gaat, is $\frac{dy'}{dx'} = \frac{y'}{x'}$ en dus

$$-G^2(v-\omega)+H^2(v+\omega)+2GH\,\omega\cos 2vt=0,\;.\;.\;(77)$$

terwijl de conditie voor een buigpunt luidt

$$G^2(v-\omega)^3-H^2(v+\omega)^3+2GH(v^2-\omega^2)\,\omega\cos 2vt=0\ldots(78)$$

Uit (77) leidt men af

$$4GH\omega\cos^2 vt=\{G(v-\omega)+H(v+\omega)\}(G-H),$$

en

$$4GH\omega\sin^2 vt=\{-G(v-\omega)+H(v+\omega)\}(G+H),$$

waaruit door deeling volgt voor de conditie voor een raaklijn door O

$$tg^2 vt=\frac{G+H}{G-H}\cdot\frac{-G(v-\omega)+H(v+\omega)}{G(v-\omega)+H(v+\omega)}\cdot\;.\;.\;.\;(79)$$

Op overeenkomstige wijze leidt men uit (78) voor de conditie voor een buigpunt af

$$tg^2 vt=\frac{-G(v-\omega)+H(v+\omega)}{G(v-\omega)+H(v+\omega)}\cdot\frac{G(v-\omega)^2+H(v+\omega)^2}{G(v-\omega)^2-H(v+\omega)^2}\cdot\;.\;(80)$$

Uit (73) en (74) ziet men, dat als t toeneemt van 0 tot $\frac{\pi}{2v}$, een gedeelte van de baan beschreven wordt gelegen tusschen een apocentrum en het eerstvolgende pericentrum. Zulk een gedeelte van de baan, waaruit door spiegeling de voortzetting kan worden afgeleid, zullen we een *baanelement* noemen. *Een baanelement wordt in den tijd* $\frac{\pi}{2v}$ *doorloopen.* In dien tijd neemt $\cos 2vt$ af van $+1$ tot -1. In verband hiermee ziet men uit (79) en (80), *dat op een baanelement hoogstens één punt kan gelegen zijn, waar de raaklijn door O gaat, en hoogstens één buigpunt.* Verder is uit (79) en (80) nog af te leiden, *dat beide punten niet tegelijkertijd op een baanelement kunnen gelegen zijn, maar wel beide kunnen ontbreken.*

Noemen we den hoek ψ, dien de voerstraal doorloopt, als het punt een baanelement doorloopt, den *hoek van het baanelement*, dan ziet men gemakkelijk in, *dat de hoek van het baanelement gelijk is aan den hoek, dien de voerstraal der cirkelbeweging met grootsten straal beschrijft. De gemiddelde hoeksnelheid, waarmee de baan doorloopen wordt, is gelijk aan de hoeksnelheid der cirkelbeweging met grootsten straal.*

Voor de sectorsnelheid $s = \frac{1}{2}\left(y' \frac{dx'}{dt} - x' \frac{dy'}{dt}\right)$, positief gerekend, als de voerstraal zich met de wijzers van het uurwerk mee verplaatst, vindt men uit (73) en (74)

$$2s = -G^2(v - \omega) + H^2(v + \omega) + 2GH\omega \cos 2vt \ldots (81)$$

Voor de gemiddelde sectorsnelheid $\bar{s}$ gedurende den tijd, waarin een baanelement wordt doorloopen, vindt men dus

$$2\bar{s} = -G^2(v - \omega) + H^2(v + \omega) \ldots\ldots (82)$$

Volgens (81) *is de sectorsnelheid maximaal in het apocentrum* $(t = 0)$, *en minimaal in het pericentrum* $\left(t = \frac{\pi}{2v}\right)$. Deze maximale en minimale waarden van s zijn

$$2s_{max.} = (G + H)\{-G(v - \omega) + H(v + \omega)\}, \ldots (83)$$

$$2s_{min.} = (-G + H)\{G(v - \omega) + H(v + \omega)\}. \ldots (84)$$

Noemen we verder de voerstralen in apo- en pericentrum l en k, dan is

$$l = G + H,$$

$$k = VA\ (G - H).$$

§ 3. Discussie der verschillende baanvormen.

Bij de onderscheiding der verschillende gevallen zullen we, met het het geval $H > G$ beginnend, H steeds kleiner laten worden. Bij ieder dier gevallen onderscheiden we dan nog de mogelijkheid α, waarbij $v > \omega$, en de mogelijkheid β, waarbij $v < \omega$. We zullen hierbij eerst de algemeene, daarna de overgangsgevallen behandelen.

Geval I. $H > G$. *De snelle cirkelbeweging heeft den grootsten straal.*

Nu is ook $H(v + \omega) > G(v - \omega)$ en $H(v + \omega)^2 > G(v - \omega)^2$, zoodat men direct uit (80) ziet, *dat de baan geen buigpunt bezit*, en uit (83) en (84), dat de sectorsnelheid steeds positief is, *zoodat de voerstraal niet terugloopt*, *en de baan met de rotatie van het veld mee doorloopen wordt.*

De gemiddelde hoeksnelheid is nu de hoeksnelheid $\omega + v$

van de snelle cirkelbeweging. Voor den hoek ψ van het baanelement vindt men dus

$$\psi = \frac{\pi}{2v}(v + \omega) = \tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{\omega}{v} + 1\right).$$

Deze hoek is dus, zooals ook direct was in te zien, steeds grooter dan $\frac{1}{2}\pi$, terwijl $\psi < \pi$ is voor $v > \omega$ (geval α), en $\psi > \pi$ voor $v < \omega$ (geval β) (zooals ook daaraan is in te zien, dat beide cirkelbewegingen voor $v > \omega$ in tegengestelden, en voor $v < \omega$ in denzelfden zin geschieden). In de figuren 3 en 4 zijn voor deze beide gevallen de baankrommen geteekend.

In het overgangsgeval tusschen α en β, waarin $\omega = v$ is, is $\psi = \pi$; de baan is dan een excentrische cirkel, die O omvat. In het bizondere geval $v = 0$ is $\psi = \infty$, en de baan een cirkel met O als middelpunt.

Geval II. H < G. *De snelle cirkelbeweging heeft den kleinsten straal.*

De gemiddelde hoeksnelheid is nu $\omega - v$, terwijl de hoek ψ van het baanelement is

$$\psi = \frac{\pi}{2v}(\omega - v) = \tfrac{1}{2}\pi\left(\frac{\omega}{v} - 1\right)$$

(positief gerekend met de wijzers van het uurwerk mee).

De baan wordt tegen de rotatie van het veld in doorloopen, als $v > \omega$ (geval α), en met die rotatie mee, als $v < \omega$ (geval β); in het geval α is $0 > \psi > -\frac{1}{2}\pi$, terwijl in het geval β ψ alle mogelijke positieve waarden hebben kan. In het overgangsgeval $\omega = v$ is $\psi = 0$, en de baan een cirkel, die O niet omvat, zoodat nu het evenwichtspunt *niet* omloopen wordt. Voor $v = 0$ is weer $\psi = \infty$, en de baan een cirkel met O als middelpunt.

We hebben nu verder nog drie mogelijkheden te onderscheiden:

A. *Van* H $(v + \omega)$ *is de absolute waarde grooter dan van* G $(v - \omega)$.

Daar nu H $(v + \omega)^2 >$ G $(v - \omega)^2$, ziet men uit (80), *dat de baankromme geen buigpunt heeft.* Volgens (83) en (84) *wordt in een apocentrum de baan met de rotatie van het veld mee doorloopen, en in een pericentrum tegen die rotatie in;*

er is nu op een baanelement een punt, waar de raaklijn door O gaat, en de voerstraal dus terugloopt.

α. $v > \omega$. *Beide cirkelbewegingen hebben tegengestelden omloopszin.*

Nu zijn ψ, en de gemiddelde hoeksnelheid negatief; *de baan vertoont dus naar buiten gekeerde lussen, en wordt tegen de rotatie van het veld in doorloopen.*

Verder is $H(v+\omega) > G(v-\omega)$ of $\frac{\omega}{v} > \frac{G-H}{G+H} = \frac{k}{l}$, (waarin k en l den maximalen en minimalen voerstraal voorstellen), zoodat:

$$0 > \psi > -\tfrac{1}{2}\pi\,\frac{l-k}{l}.$$

Dit geval IIAα is in figuur 5 geteekend.

β. $v < \omega$. *Beide cirkelbewegingen hebben denzelfden omloopszin.*

De baan vertoont naar binnen gekeerde lussen, en wordt met de rotatie van het veld mee doorloopen.

Nu is $H(v+\omega) > G(\omega - v)$ of $\frac{\omega}{v} < \frac{G+H}{G-H} = \frac{l}{k}$, zoodat:

$$0 < \psi < \tfrac{1}{2}\pi\,\frac{l-k}{k}.$$

Dit geval IIAβ is in figuur 6 geteekend.

B. $H(v+\omega) < \sqrt{A}\,G(v-\omega)$, *maar* $H(v+\omega)^2 > G(v-\omega)^2$. Volgens (80) *heeft ieder baanelement een buigpunt*, terwijl er volgens (79) *geen punt is, waar de raaklijn door* O *gaat, en de voerstraal dus niet terugloopt.*

Uit $H(v+\omega)^2 > G(v-\omega)^2$ volgt:

$$\left(\frac{k}{l} - \frac{\omega}{v}\right)^2 < \frac{\omega^2}{v^2}\,\frac{l^2-k^2}{l^2}$$

en

$$\left(\frac{\omega}{v} - \frac{l}{k}\right)^2 < \frac{l^2-k^2}{k^2}.$$

α. $v > \omega$.

Nu is $H(v+\omega) < G(v-\omega)$, of $\frac{\omega}{v} < \frac{k}{l}$, waaruit in verband met de andere ongelijkheid volgt:

$$-\tfrac{1}{2}\pi < -\tfrac{1}{2}\pi\,\frac{\sqrt{l^2-k^2}-(l-k)}{k} < \psi < -\tfrac{1}{2}\pi\,\frac{l-k}{l}.$$

Dit geval II Bα is in figuur 7 geteekend.

β. $v < \omega$.

Nu is $H(v+\omega) < G(\omega - v)$ of $\frac{\omega}{v} > \frac{l}{k}$, waaruit volgt:

$$\tfrac{1}{2}\pi\,\frac{l-k}{k} < \psi < \tfrac{1}{2}\pi\,\frac{\sqrt{l^2-k^2}+l-k}{k}.$$

Dit geval II Bβ is in figuur 8 geteekend.

C. $H(v+\omega)^2 < G(v-\omega)^2$.

Er is nu geen buigpunt, en geen punt, waar de raaklijn door O gaat.

α. $v > \omega$.

Nu is

$$\psi < -\tfrac{1}{2}\pi\,\frac{\sqrt{l^2-k^2}-(l-k)}{k}.$$

β. $v < \omega$.

$$\psi > \tfrac{1}{2}\pi\,\frac{\sqrt{l^2-k^2}+l-k}{k}.$$

Deze beide gevallen II Cα en II Cβ zijn door de figuren 9 en 10 voorgesteld, die zich van de figuren 7 en 8 door het verdwenen zijn der buigpunten onderscheiden.

Om in zich zelf weerkeerende baankrommen te verkrijgen, is in de figuren 3, 5, 7 en 9 (geval α) $v = 3\omega$ genomen, waardoor $\psi = \frac{2\pi}{3}$ wordt in figuur 3, en $\psi = -\frac{\pi}{3}$ in de figuren 5, 7 en 9. In de figuren 4, 6, 8 en 10 (geval β) is $v = \frac{3}{5}\omega$ genomen, waardoor $\psi = \frac{4\pi}{3}$ wordt in figuur 4, en $\psi = \frac{\pi}{3}$ in de figuren 6, 8 en 10. De baankrommen zijn nu algebraïsch, hetgeen ze in het algemeen niet zijn. Verder is door een pijltje de omloopszin aangegeven, terwijl de rotatie van het veld met de wijzers van het uurwerk mee uitgevoerd gedacht wordt.

Overgangsgevallen.

Overgangsgeval tusschen IIA en IIB. $H(v+\omega) = VA\,G(v-\omega)$.
De baankromme heeft een keerpunt in het apocentrum voor $v > \omega$, *en een keerpunt in het pericentrum voor* $v < \omega$, *terwijl de keerraaklijn door* O *gaat.* (In het algemeen staat in apo- en pericentrum de raaklijn loodrecht op den voerstraal).

$\alpha.\quad v > \omega$

$$\psi = -\tfrac{1}{2}\pi\frac{l-k}{l}.$$

$\beta.\quad v < \omega$

$$\psi = \tfrac{1}{2}\pi\frac{l-k}{k}.$$

Overgangsgeval tusschen IIB en *IIC.* $H(v+\omega)^2 = G(v-\omega)^2$.
Twee buigpunten hebben zich in het apocentrum vereenigd tot een punt, waar de raaklijn 4-puntig aanraakt, of een dubbel buigpunt. Oogenschijnlijk verschillen de banen bij deze overgangsgevallen niet van de figuren 9 en 10.

$\alpha.\quad v > \omega.$

$$\psi = -\tfrac{1}{2}\pi\frac{\sqrt{l^2-k^2}-(l-k)}{k}.$$

$\beta.\quad v < \omega.$

$$\psi = \tfrac{1}{2}\pi\frac{\sqrt{l^2-k^2}+l-k}{k}.$$

Overgangsgeval tusschen I en II. $G = H$.

Het pericentrum ligt nu in O, zoodat de kromme, door (73) en (74) voorgesteld, telkens door O gaat, en dus rozetvormig zou worden, in de onderstelling, dat v een willekeurige waarde heeft. In den volgenden paragraaf zal echter blijken, dat voor $G = H$ tevens $v = 0$ is, zoodat nu de baan een cirkel wordt met O als middelpunt, met de rotatiesnelheid van het veld doorloopen.

§ 4. Graphische voorstelling der verschillende gevallen van § 3.

1. We zullen nu onderzoeken, voor welke waarden van a, c en ω^2, dus voor welke standen van het beeldpunt in de gra-

phische voorstelling van Hoofdstuk I, § 4 (figuur 2), de in den vorigen paragraaf behandelde gevallen voorkomen. In het stabiele gebied krijgt men twee dergelijke bewegingen als we boven bestudeerd hebben, tusschen wier amplitudo en phase geen betrekking bestaat, en die we als de eerste ($v^2 = v_1^2$) en de tweede beweging ($v^2 = v_2^2 < v_1^2$) hebben onderscheiden. In het half-labiele geval ($v_2^2 < 0 < v_1^2$) is de tweede beweging exponentieel geworden, maar de eerste beweging valt nog steeds onder één der in § 3 onderscheiden gevallen. In figuur 2 is in ieder veld van het stabiele en half-labiele gebied door een teeken aangegeven in welk geval de eerste beweging verkeert; in het stabiele geval is dit ook voor de tweede beweging aangegeven, terwijl het teeken daarop betrekking hebbend ter onderscheiding van een sterretje voorzien is. Daar de geheele figuur symmetrisch is ten opzichte der rechte $a = c$, is in sommige velden van het stabiele gebied wegens de beperkte ruimte slechts één teeken aangebracht, terwijl dan in het symmetrisch gelegen veld het andere teeken geplaatst is; eveneens wegens de beperkte ruimte is het teeken IIAβ gedeeltelijk naast, in plaats van in, het veld geplaatst, waar het betrekking op heeft. Ook de begrenzingen van het stabiele en half-labiele gebied kunnen in dit onderzoek betrokken worden, daar ook dan nog een beweging, als in den vorigen paragraaf bestudeerd is, mogelijk is, mits in de oplossing slechts die constanten nul zijn, die een afwijkende beweging zouden veroorzaken.

Om de verdeeling der verschillende gevallen in de graphische voorstelling aan te geven, brengen we de krommen in teekening, waarop het beeldpunt gelegen moet zijn, om een der overgangsgevallen te krijgen.

2. *Overgangskromme tusschen I en II.*

Nu is in (65) en (66) òf G = H òf G = — H. Door de substitutie G = H vindt men

$$v^2 + \omega^2 - a = 0$$

en

$$v\omega = 0,$$

waaruit (het geval $\omega = 0$ uitsluitend) volgt $v = 0$ en

$$a = \omega^2.$$

Evenzoo leidt met uit G = — H af

$$c = \omega^2.$$

Op deze rechten $a = \omega^2$ en $c = \omega^2$ is tevens $v = 0$, en dus (als de coëfficienten, die het evenwicht labiel maken nul zijn) de beweging cirkelvormig met O als middelpunt, en de rotatiesnelheid van het veld, terwijl het materieele punt zich steeds bevindt op een der hoofdassen van het veld (tenzij $a = c = \omega^2$), en wel op de X-as voor $a = \omega^2$, en op de Y-as voor $c = \omega^2$ (zie Hoofdstuk I, § 6, 1ste Overgangsgeval). We hebben hier dus eigenlijk niet met een overgangsgeval, maar met een grensgeval te doen. Een stabiel blijvende overgang tusschen I en II heeft men alleen in het punt S ($a = c = \omega^2$); het materieele punt draait nu, wat de tweede beweging aangaat, met het krachtenveld mee, maar behoeft niet een der hoofdassen te volgen. *Rozetvormige baankrommen kunnen dus niet voorkomen.*

3. *Beeldkromme, waar de straal van een der cirkelbewegingen nul is.*

Uit (67) en (68) ziet men, dat het alleen dan mogelijk is, dat van G en H de eene nul is en de andere niet, als $a = c$ is. *De gezochte beeldkromme is dus* $a - c = 0$, *zoowel voor de eerste als voor de tweede beweging, die dan beide cirkelvormig zijn, met O als middelpunt.* Voor $a = c$ levert (51) $v_1 = \omega + \sqrt{a}$ in beide stabiliteitsgevallen, en $v_2 = -\omega + \sqrt{a}$ in het eerste, $v_2 = \omega - \sqrt{a}$ in het tweede stabiliteitsgeval. Volgens (67) en (68) is nu $H_1 = 0$, en bovendien in het eerste stabiliteitsgeval $G_2 = 0$, in het tweede stabiliteitsgeval $H_2 = 0$.

Hieruit volgt in verband met de overgangskromme tusschen I en II, *dat het geheele stabiele en half- labiele gebied met II gemerkt moet worden; het eerste stabiliteitsgebied bovendien met I*, het tweede stabiliteitsgebied met II*.* Men kan voor het geval $a = c$ de twee bewegingen, die beide cirkelvormig zijn, en met gelijke hoeksnelheden $\sqrt{a}$ in tegengestelden zin doorloopen worden, gemakkelijk samenstellen tot een enkele elliptische beweging. Hierbij is de rotatiesnelheid ω van het veld geheel weggevallen, zoodat de beweging niet door die rotatie gewijzigd wordt, zooals te verwachten was, daar voor $a = c$ het krachtenveld symmetrisch om O is.

4. *Overgangskromme tusschen II A en II B. Beeldkromme, waar de baan een keerpunt vertoont.*

Nu is $H(v+\omega) = \pm G(v-\omega)$. Met behulp van $H(v+\omega) = G(v-\omega)$ leveren (65) en (66)

$$v(v^2 - \omega^2 - a) = 0,$$

$$\omega(v^2 - \omega^2 + c) = 0,$$

of daar $\omega \neq 0$,

$$v(a+c) = 0.$$

Nu komt weer $v = 0$ alleen als grensgeval in aanmerking, *zoodat men als eenige overgangskromme vindt*

$$a + c = 0,$$

d.i. de raaklijn in O aan de parabolische grenskromme. Dezefde uitkomst wordt ook verkregen, als men $H(v+\omega) = -G(v-\omega)$ stelt.

Is omgekeerd $a + c = 0$, en b.v. a positief, dan zijn de twee wortels van (50) $v_1^2 = \omega^2 + a$ en $v_2^2 = \omega^2 - a$, terwijl (65) en (66) leveren $H_1(v_1+\omega) = G_1(v_1-\omega)$ en $H_2(v_2+\omega) = -G_2(v_2-\omega)$. *In het stabiele gebied is de rechte* $a+c=0$ *dus een overgangskromme zoowel voor de eerste, als voor de tweede beweging, zoodat beide banen een keerpunt vertoonen.*

5. *Overgangskromme tusschen IIB en IIC. Beeldkromme, waar de baan een dubbel buigpunt vertoont.*

Daar in (65) en (66) G en H zoowel positief als negatief zijn kunnen, en we in § 3 slechts voor de eenvoudigheid G en H positief ondersteld hebben, is nu $H(v+\omega)^2 = \pm G(v-\omega)^2$. Met behulp van $H(v+\omega)^2 = G(v-\omega)^2$ volgt uit (66):

$$cv\omega = 0,$$

waaruit weer als overgangskromme volgt

$$c = 0.$$

Evenzoo vindt men voor $H(v+\omega)^2 = -G(v-\omega)^2$ uit (65) als overgangskromme

$$a = 0.$$

Omgekeerd leveren (65) en (66), als $a = 0$ of $c = 0$ is (zoowel voor $v = v_1$ als voor $v = v_2$), $H(v+\omega^2) = -G(v-\omega)^2$ of $H(v+\omega)^2 = G(v-\omega)^2$, *zoodat de coordinatenassen in het stabiele geval voor beide bewegingen overgangskrommen zijn; de banen van beide bewegingen vertoonen dan een dubbel buigpunt.*

We hebben gevonden, dat G of H nul is voor $a = c$, zoodat, als men in het geval II verkeert, zich voor $a = c$ tevens het geval C voordoet. In verband met de overgangskrommen is hieruit direct de verdeeling der teekens A, B en C af te leiden.

6. *Beeldkrommen, waarvoor v^2 constant is.*

We schrijven (50) in den vorm

$$(a - v^2 - \omega^2)(c - v^2 - \omega^2) = 4v^2\omega^2 \quad . \quad . \quad . \quad (85).$$

Hieruit ziet men, *dat de beeldpunten, waarvoor een der wortels v^2 een bepaalde waarde heeft, op een gelijkzijdige hyperbool liggen,* waarvan de asymptoten zijn $a = v^2 + \omega^2$ en $c = v^2 + \omega^2$. Geeft men aan v^2 alleen positieve waarden, *dan gaan door ieder punt van het stabiele gebied twee hyperbolen, door ieder punt van het half-labiele gebied één hyperbool.* De parabolische grenskromme is de omhullende van deze hyperbolen; voor een punt dier grenskromme vallen beide hyperbolen samen. Op de parabool is $v^2 = \frac{1}{4}(2\omega^2 + a + c)$ en $a + c > 0$, zoodat op het getrokken deel v tusschen 0 en ω ligt; voor $v < \omega$ raakt dus de hyperbool het getrokken deel der parabool in 2 punten, terwijl voor $v > \omega$ de hyperbool de parabool niet raakt (ten minste niet in bestaanbare punten).

Is v^2 de eene wortel van (50), dan is de andere wortel $2\omega^2 + a + c - v^2$; voor den rechtertak van de hyperbool is die andere wortel $> v^2$, en voor den linkertak $< v^2$, behalve op het stuk gelegen tusschen de beide raakpunten met de parabool, zoo dit aanwezig is. Hieruit volgt, *dat de rechtertak der hyperbool op de tweede beweging, en de linkertak (eventueel op het stuk tusschen de raakpunten met de parabool na) op de eerste beweging betrekking heeft.* Op den rechtertak verkeert men in het geval I, en op den linkertak in het geval II. *Voor beeldpunten op denzelfden tak van een hyperbool gelegen is dus de hoek van het baanelement dezelfde, terwijl voor beeldpunten op verschillende takken derzelfde hyperbool de hoeken van het baanelement π verschillen.*

7. *Overgangskromme tusschen α en β. Beeldkromme, waar een der beide bewegingen cirkelvormig is.*

Volgens het voorgaande is dit de hyperbool, waarvoor $v^2 = \omega^2$, dus

$$a\,c - 2\,\omega^2(a + c) = 0.$$

De beide raakpunten met de parabolische grenskromme zijn nu in O samengevallen, waar hyperbool en parabool elkaar dus vier-puntig aanraken.

Deze hyperbool is in de graphische voorstelling door 4 aangeduid. *Op den rechtertak der hyperbool is de baan der tweede beweging een cirkel, die O omvat, en verkeert de eerste beweging in het geval* α $(v > \omega)$; *op den linkertak is de baan der eerste beweging een cirkel, die O niet omvat, en verkeert de tweede beweging in het geval* β $(v < \omega)$.

Hieruit is de verdeeling van α en β over de verschillende velden gemakkelijk af te leiden. Men ziet uit figuur 2, dat, behalve de rozetvorm, alle in § 3 besproken baanvormen voor kunnen komen, ook dan als men alleen het stabiele gebied beschouwt.

§ 5 Grootte, stand en phase der banen.

De grootte der banen is natuurlijk willekeurig. Echter ook de stand van de baan van een der beide bewegingen op het vaste vlak is willekeurig, mits O op zijn plaats blijft. De phase moet zoodanig zijn, dat als het materieele punt zich in een apocentrum bevindt, daar juist een hoofdas van het roteerende krachtenveld passeert, en wel de hoofdas met den grootsten bijbehoorenden coëfficient in het geval I, en met den kleinsten coëfficient in het geval II; in een pericentrum passeert dan steeds de andere hoofdas. (Zie Hoofdstuk II, § 1.)

§ 6. Langzame rotatie van het veld.

We zullen alleen het geval van stabiel evenwicht onderzoeken, zoodat dus a en c beide positief zijn, waarbij we nog $a \geq c$ kunnen onderstellen. Is ω klein, dan levert (31) bij benadering

$$v^2 = \tfrac{1}{2}(2\,\omega^2 + a + c) \pm \tfrac{1}{2}(a - c)\left\{1 + \frac{4\,\omega^2(a + c)}{(a - c)^2}\right\}$$

dus

$$v_1^2 = a + \omega^2\,\frac{3a + c}{a - c},$$

$$v_2^2 = c - \omega^2\,\frac{a + 3c}{a - c},$$

waaruit volgt

$$v_1 = \left(1 + \omega^2\,\frac{3a + c}{2a\,(a - c)}\right)\sqrt{a},$$

$$v_2 = \left(1 - \omega^2 \frac{a + 3c}{2c(a-c)}\right) \sqrt{c}.$$

Uit (52) en (53) vindt men nu

$$F_1 = \frac{2\omega \sqrt{a}}{a - c} E_1,$$

$$E_2 = -\frac{2\omega \sqrt{c}}{a - c} F_2,$$

zoodat VA G_1 > VA H_1 en VA G_2 < VA H_2 is, en dus de eerste beweging in het geval II, de tweede beweging in het geval I verkeert, zooals ook uit de graphische voorstelling (figuur 2) te zien is. Daar $\omega < \nu$ is, wordt de eerste beweging tegen de rotatie van het veld in, de tweede beweging met die rotatie mee doorloopen.

De baan is nu te beschouwen als een gerekte ellips, die met de rotatiesnelheid van het veld ronddraait. Bij de eerste beweging valt de groote as der ellips langs de draaiende X-as, bij de tweede beweging langs de Y-as.

De hoeken ψ_1 en ψ_2 der baanelementen dor beide bewegingingingen zijn

$$\psi_1 = -\tfrac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{\omega}{\sqrt{a}}\right),$$

$$\psi_2 = \tfrac{1}{2}\pi\left(1 + \frac{\omega}{\sqrt{c}}\right).$$

Bij de eerste beweging loopt de ellips het materieele punt tegemoet; bij de tweede beweging loopt de ellips het materieele punt vooruit.

De anomalistische omloopstijd (de tijd, waarin het materieele punt vier baanelementen doorloopt) is voor de eerste beweging

$$\frac{2\pi}{v_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{a}}\left(1 - \omega^2 \frac{3a + c}{2a(a - c)}\right),$$

en voor de tweede beweging

$$\frac{2\pi}{v_2} = \frac{2\pi}{\sqrt{c}}\left(1 + \omega^2 \frac{3c + a}{2c(a - c)}\right).$$

De werkelijke omloopstijd (waarin de voerstraal een hoek 2π doorloopt) is gemiddeld voor de eerste beweging

$$-\frac{2\pi}{v_1}\cdot\frac{2\pi}{4\psi_1}=\frac{2\pi}{\sqrt{a}}\left(1+\frac{\omega}{\sqrt{a}}\right),$$

en voor de tweede beweging

$$\frac{2\pi}{v_2}\cdot\frac{2\pi}{4\psi_2}=\frac{2\pi}{\sqrt{c}}\left(1-\frac{\omega}{\sqrt{c}}\right).$$

In alle uitkomsten van dezen paragraaf is zooveel mogelijk benaderd, maar zoo, dat ω niet geheel uit de uitkomsten verdwijnt. Men ziet er uit:

Het eerste effect der rotatie is, dat de harmonische slingeringen langs X- en Y-as in plaats van rechtlijnig gerekt-elliptisch worden, welke ellipsen met de rotatiesnelheid van het veld roteeren; de eerste beweging, die een omloopszin heeft tegengesteld aan dien van het veld, wordt door de rotatie vertraagd; de tweede beweging met denzelfden omloopszin als het veld wordt door die rotatie versneld.

§ 7. Snelle rotatie van het veld.

1. Is ω groot, dan volgt uit (51) bij benadering

$$v^2=\omega^2+\frac{a+c}{2}\pm 2\omega\left\{1+\frac{(a-c)^2}{16\,(a+c)\,\omega^2}\right\}\sqrt{\frac{a+c}{2}},$$

dus

$$v_1=\omega+\left\{1+\frac{(a-c)^2}{16(a+c)\omega^2}\right\}\sqrt{\frac{a+c}{2}},$$

$$v_2=\omega-\left\{1+\frac{(a-c)^2}{16(a+c)\omega^2}\right\}\sqrt{\frac{a+c}{2}}.$$

Uit (65) en (66) volgt

$$H_1=\frac{a-c}{8\omega^2}\,G_1,$$

$$H_2=\frac{a-c}{8\omega^2}\,G_2,$$

zoodat men voor x' en y' vindt

$$x' = G_1 \cos\left\{\left(1 + \frac{(a-c)^2}{16(a+c)\omega^2}\right)\sqrt{\frac{a+c}{2}}\cdot t + q_1\right\} +$$

$$+ G_2 \cos\left\{\left(1 + \frac{(a-c)^2}{16(a+c)\omega^2}\right)\sqrt{\frac{a+c}{2}}\cdot t - q_2\right\} +$$

$$+\frac{a-c}{8\omega^2}\left[G_1 \cos\left\{\left(2\omega + \sqrt{\frac{a+c}{2}}\right)t + q_1\right\} + G_2 \cos\left\{\left(2\omega - \sqrt{\frac{a+c}{2}}\right)t + q_2\right\}\right],$$

$$y' = G_1 \sin\left\{\left(1 + \frac{(a-c)^2}{16(a+c)\omega^2}\right)\sqrt{\frac{a+c}{2}}\cdot t + q_1\right\} -$$

$$- G_2 \sin\left\{\left(1 + \frac{(a-c)^2}{16(a+c)\omega^2}\right)\sqrt{\frac{a+c}{2}}\cdot t - q_2\right\} +$$

$$+\frac{a-c}{8\omega^2}\left|-G_1 \sin\left\{\left(2\omega + \sqrt{\frac{a+c}{2}}\right)t + q_1\right\} - G_2 \sin\left\{\left(2\omega - \sqrt{\frac{a+c}{2}}\right)t + q_2\right\}\right| .$$

De twee laatste termen van x' en y' stellen kleine cirkelvormige bewegingen (nutaties) met stralen $G_1 \frac{a-c}{8\omega^2}$ en $G_2 \frac{a-c}{8\omega^2}$ voor, met groote hoeksnelheden $2\omega \pm \sqrt{\frac{a+c}{2}}$ met de rotatie van het veld mee doorloopen. De beide eerste termen kunnen tot de volgende vormen herleid worden

$$x' = M \cos\left\{\left(1 + \frac{(a-c)^2}{16(a+c)\omega^2}\right)\sqrt{\frac{a+c}{2}}\cdot t + m\right\},$$

$$y' = N \cos\left\{\left(1 + \frac{(a-c)^2}{16(a+c)\omega^2}\right)\sqrt{\frac{a+c}{2}}\cdot t + n\right\},$$

waarin M, N, m en n willekeurige constanten zijn.

Nog verder verwaarloozend vindt men

$$x' = M \cos\left(\sqrt{\frac{a+c}{2}}\cdot t + m\right),$$

$$y' = N \cos\left(\sqrt{\frac{a+c}{2}}\cdot t + n\right).$$

Hieruit leest men af, dat de beweging voor zeer groote rotatiesnelheid van het veld dezelfde is, alsof het krachtenveld in rust, maar a en c beide door hun arithmetisch gemiddelde vervangen waren; dus als in een rustend veld, dat symmetrisch om O is, en waarvan de potentiaalfunctie is

$$V = \tfrac{1}{4}(a+c)(x^2 + y^2).$$

2. Dat men bij snelle rotatie van het veld a en c door hun middelwaarde $\frac{a+c}{2}$ mag vervangen, was te verwachten, daar men dan de kracht mag vervangen door de middelwaarde gedurende een omloopstijd $\frac{2\pi}{\omega}$ van het veld. Uit (71) en (72) vindt men nu voor de middelwaarden $\bar{X}'$ en $\bar{Y}'$ der krachtcomponenten in de richting der vaste assen

$$\bar{X}' = -\tfrac{1}{2}(a+c)\,x',$$

$$\bar{Y}' = -\tfrac{1}{2}(a+c)\,y',$$

waaruit het beweerde direct volgt.

3. Uit de voorgaande beschouwingen ziet men, dat bij snelle rotatie het evenwicht stabiel is voor $a+c>0$, en labiel voor $a+c<0$. In het eerste geval $(a+c>0)$ is *het eerste effect van het niet oneindig groot zijn der rotatiesnelheid, dat de elliptische baan iets sneller doorloopen wordt, zoo dat de omloopstijd bij benadering* $1+\frac{(a-c)^2}{16(a+c)\,\omega^2}$ *maal zoo klein wordt, en dat zich bij deze elliptische beweging twee kleine cirkelvormige nutaties voegen met kleinen omloopstijd, en denzelfden omloopszin als het veld.*

4. *Overgangsgeval.* $a+c=0$.

Voor $a+c=0$ gaan de afgeleide formules voor x' en y' niet door, waarom we dit geval nu op zich zelf onderzoeken. We onderstellen daartoe $a>0$. Volgens (51) is nu (rigoureus)

$$v^2 = \omega^2 \pm a,$$

zoodat voor ω groot, v^2 positief en het evenwicht dus stabiel is; hiermede is de uitkomst van Hoofdstuk I, § 7, teruggevonden, dat het evenwicht stabiel is voor $a+c \geq 0$, en labiel voor $a+c<0$.

Nu is bij benadering

$$v_1 = \omega + \frac{a}{2\omega},$$

$$v_2 = \omega - \frac{a}{2\omega},$$

zoodat volgens (65) en (66)

$$H_1 = \frac{a}{4\omega^2} G_1,$$

$$H_2 = \frac{a}{4\omega^2} G_2.$$

Voor x' en y' vindt men dus:

$$x' = G_1 \cos\left(\frac{a}{2\omega} t + q_1\right) + G_2 \cos\left(\frac{a}{2\omega} t - q_2\right) +$$

$$+ \frac{a}{4\omega}\left\{ G_1 \cos(2\omega t + q_1) + G_2 \cos(2\omega t + q_2)\right\},$$

$$y' = G_1 \sin\left(\frac{a}{2\omega} t + q_1\right) - G_2 \sin\left(\frac{a}{2\omega} t - q_2\right) +$$

$$+ \frac{a}{4\omega^2}\left\{ - G_1 \sin(2\omega t + q_1) - G_2 \sin(2\omega t + q_2)\right\}.$$

De eerste twee termen van x' en y' geven de hoofdbeweging aan, die kan worden voorgesteld door

$$x' = M \cos\left(\frac{a}{2\omega} t + m\right),$$

$$y' = N \sin\left(\frac{a}{2\omega} t + n\right),$$

waarin M, N, m en n willekeurig zijn. Dit is een langzame elliptische beweging met een periode $\frac{4\pi\omega}{a}$. De laatste termen van x' en y', waarin de factor $\frac{a}{4\omega^2}$ voorkomt, en die dus klein zijn, kunnen herleid worden tot

$$x' = \frac{a}{4\omega^2} S \cos(2\omega t + s),$$

$$y' = - \frac{a}{4\omega^2} S \sin(2\omega t + s),$$

waarin S en s van M, N, m en n afhangen. Dit geeft een kleine cirkelvormige beweging (nutatie), met de dubbele hoeksnelheid van het veld in denzelfden zin doorloopen, met een straal van de orde van $\frac{a}{4\omega^2}$.

§ 8. **Invloed der verwaarloosde termen.**

In de overgangsgevallen tusschen stabiel en labiel evenwicht

is, zooals we in Hoofdstuk I, § 6 gevonden hebben, het evenwicht labiel, zoodat stabiel evenwicht niet door het aanbrengen van kleine veranderingen in het krachtenveld (mits $p = 0$ latend), of in de rotatiesnelheid in labiel evenwicht te veranderen is (wel is zoo labiel evenwicht in stabiel te veranderen). De eenige uitzondering hierop is het geval, dat $a = c > 0$ en $\omega = \sqrt{a}$ is (beeldpunt in S), dat een overgangsgeval en toch stabiel is; dit wordt labiel door a iets grooter en c iets kleiner dan ω^2 te nemen, of omgekeerd. Het resultaat, dat overgangsgevallen labiel zijn, is echter afgeleid, door van V de termen van hoogeren graad dan den 2den weg te laten, m. a. w. door het krachtenveld als lineair te beschouwen. Juist in de overgangsgevallen nu zullen die verwaarloosde termen een belangrijke rol kunnen spelen, zoodat, al zal het in het algemeen waar blijven, dat een overgangsgeval labiel is (op die ééne genoemde uitzondering na), in bizondere gevallen zulk een overgangsgeval ook stabiel kan worden.

Die verwaarloosde termen zullen op den duur ook invloed uitoefenen op de banen in het stabiele geval beschreven, maar ze zullen in elk geval de beweging stabiel laten; deze invloed is natuurlijk des te kleiner naar mate de evenwichtsverstoring geringer is.

DERDE HOOFDSTUK.

INVLOED DER WRIJVING.

§ 1. Algemeene beschouwingen.

1. We nemen in dit hoofdstuk het bestaan aan van *een wrijving tusschen het materieele punt en het vlak gelijk aan μ maal de relatieve snelheid en tegengesteld gericht aan die snelheid.* Voorloopig zullen we het algemeene geval beschouwen, dat het krachtenveld roteert en geen potentiaal heeft. Hierin ligt dan tevens het geval opgesloten van een wrijving evenredig aan de absolute snelheid van het punt. Daar toch de absolute snelheid de vectorsom is van relatieve en meevoeringssnelheid, *staat wrijving evenredig aan de absolute snelheid gelijk met een wrijving evenredig aan de relatieve snelheid, gepaard met een rotatiekracht, waarvoor* $p = -\mu\omega$ (zie Hoofdstuk I, § 2).

Met wrijving is nu

$$X = -ax + py - \mu \frac{dx}{dt},$$

$$Y = -cy - px - \mu \frac{dy}{dt},$$

zoodat volgens (11) en (12)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega \frac{dy}{dt} - \mu \frac{dx}{dt} - (a - \omega^2)\, x + py, \quad \ldots \quad (86)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2\omega \frac{dx}{dt} - \mu \frac{dy}{dt} - (c - \omega^2)\, y - px. \quad \ldots \quad (87)$$

Hieraan voldoet

$$x = Ae^{rt},$$

$$y = Ce^{rt},$$

waarin A, C en r gevonden worden uit

$$(r^2 + \mu r + a - \omega^2)\, A = (p - 2\,\omega r)\, C \quad \ldots \quad (88)$$

$$-(p - 2\,\omega r)\, A = (r^2 + \mu r + c - \omega^2)\, C \quad \ldots \quad (89)$$

of A en C elimineerend

$$r^4 + 2\mu r^3 + (a + c + 2\omega^2 + \mu^2)\, r^2 + \{-4p\omega + \mu\,(a + c - 2\omega^2)\}\, r + (a - \omega^2)(c - \omega^2) + p^2 = 0. \quad \ldots \quad (90)$$

2. *Van de wortels van deze biquadratische vergelijking hangt het gedrag van het materieele punt af.*

Een *bestaanbare positieve wortel* wijst op een voortdurende verwijdering van O langs een rechte door O. We noemen dit een *rechtlijnige of aperiodische verwijdering.*

Een *bestaanbare negatieve wortel* geeft een voortdurende nadering tot O langs een rechte. We noemen dit een *rechtlijnige of aperiodische demping.*

Een *wortel nul* wijst op *relatieve rust.*

Een *paar toegevoegd onbestaanbare wortels* geeft aanleiding tot gemengd exponentieel-goniometrische functies. Zijn die wortels n.l. $u \pm vi$, dan geeft dit de volgende relatieve beweging

$$x = Ee^{ut} \cos(vt + q),$$

$$y = kE\, e^{ut} \cos(vt + q + f),$$

waarin E en q willekeurig zijn, en k en f gevonden worden uit

$$k^4 = 1 + \frac{4\omega\,(u-c)\,(p-2\omega\,u)}{4\omega^2\,[2u\,(\omega^2-c) - \mu v^2] - 4\omega p\,(u^2+v^2+\omega^2-c) + p(2u+\mu)},$$

$$\sin f = \frac{v(2u+\mu)\,(1+k^2)}{2k\,(p-2\omega u)},$$

$$\cos f = -\frac{(2u+\mu)\,(1-k^2)}{4\omega k}.$$

Een *paar onbestaanbare wortels met positief bestaanbaar deel* geeft dus een beweging langs een zich verwijdende spiraal; we noemen dit een *spiraalvormige* of *periodische verwijdering.*

Een *paar onbestaanbare wortels met negatief bestaanbaar deel* geeft een beweging langs een zich vernauwende spiraal, die eerst na oneindig veel windingen O bereikt. Dit noemen we een *spiraalvormige* of *periodische demping.*

Een *paar zuiver imaginaire wortels* ($u = o$) geeft een relatieve beweging langs de ellips

$$y^2 - 2xyk \cos f + x^2k^2 = E^2k^2 \sin^2 f.$$

We noemen dit een *elliptische* of *ongedempte beweging.*

Heeft men met een dubbelen of meervoudigen wortel r te doen, dan wordt de factor van e^{rt} niet een constante, maar een geheele rationale functie van t van een graad één lager, dan het aantal gelijke wortels bedraagt. *De ingevoerde benamingen blijven echter ook dan het gedrag van het materiëele punt karakteriseeren, behalve als die meervoudige wortel nul, of zuiver imaginair is.*

Is *nul een meervoudige wortel,* dan verwijdert het punt zich van O langs een op puntcoordinaten geheele rationale kromme. *) Dit geeft dus een *aperiodische verwijdering* van O.

Een *meervoudige zuiver imaginaire wortel* daarentegen geeft een *periodische verwijdering* van O.

3. Uit het voorgaande ziet men, *dat het evenwicht alleen dan stabiel is, als alle wortels van* (90) *een bestaanbaar deel hebben, dat negatief of nul is, mits in het laatste geval de wortel enkelvoudig zij.*

Zijn alle wortels van (90) zuiver imaginair of nul en verschillend, dan geeft de oplossing slechts tot goniometrische functies aanleiding, en geen der bewegingen is gedempt. We zullen dit geval *ongedempte stabiliteit* noemen.

Zijn alle wortels van (90) bestaanbaar en negatief (niet nul),

*) A. Brill. Math. Ann. Bd. 16. p. 350.

dan zijn alle bewegingen gedempt, zoodat iedere evenwichtsverstoring wordt uitgeput, en het punt onbepaald tot O nadert. Dit noemen we *volledig gedempte stabiliteit.*

Zijn sommige wortels van (90) zuiver imaginair of nul en verschillend, andere wortels bestaanbaar en negatief, dan heeft men *onvolledig gedempte stabiliteit.*

De wortels van (90) zijn alleen dan alle zuiver imaginair of nul, als de coëfficienten van r^3 en r nul zijn, dus als

$$\mu = 0 \qquad \text{en} \qquad \omega p = 0$$

is, d. i. in de beide reeds behandelde gevallen. *Met wrijving is dus geen ongedempte stabiliteit mogelijk.*

Vergelijking (90) heeft alleen dan een enkelvoudigen wortel nul, voor

$$(a - \omega^2)(c - \omega^2) + p^2 = 0$$

en

$$- 4p\omega + \mu(a + c - 2\omega^2) \neq 0.$$

Heeft (90) een zuiver imaginairen wortel $r = vi$, dan is

$$v^2 = \frac{- 4p\omega + \mu(a + c - 2\omega^2)}{2\mu},$$

hetgeen alleen voldoet voor

$$\mu^2 (a-c)^2 + 2\mu^2 (4\omega^2 + \mu^2)(a+c) - 4(4\omega^2 + \mu^2)(p + \mu\omega)^2 = 0. \quad (92)$$

Men ziet dus, *dat met wrijving onvolledig gedempte stabiliteit slechts in bizondere gevallen voorkomt,* — *als overgang tusschen stabiliteit en labiliteit.*

Het algemeene geval van stabiliteit is volledig gedempte stabiliteit.

§ 2. Rustend krachtenveld zonder potentiaalfunctie.

Voor een rustend krachtenveld is $\omega = 0$, zoodat (90), (91) en (92) worden

$$r^4 + 2\mu r^3 + (a + c + \mu^2)r^2 + \mu(a + c)r + ac + p^2 = 0, \quad . \ (93)$$

$$ac + p^2 = 0, \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (94)$$

$$(a - c)^2 + 2\mu^2(a + c) - 4p^2 = 0. \quad . \ . \ . \ . \ (95)$$

Wil de vergelijking in r geen wortels met negatief bestaanbaar deel hebben, dan mag die vergelijking geen variaties van teeken vertoonen, zoodat

$$ac + p^2 > 0$$

en

$$a + c > 0$$

zijn moet. Uit (95) leidt men verder nog af, dat

$$(a-c)^2 + 2\mu^2(a+c) - 4p^2 > 0$$

zijn moet. Deze drie ongelijkheden zijn noodig en voldoende voor de stabiliteit van het evenwicht.

De twee eerste ongelijkheden zijn dezelfde als bij afwezigheid van wrijving. Uit de derde ongelijkheid ziet men, dat het stabiele gebied door de wrijving is uitgebreid. De grenskromme $(a-c)^2 + 2\mu^2(a+c) - 4p^2 = 0$ is een parabool, waarvan $a-c=0$ de as is, gaande door de snijpunten Q en Q′ van de krommen 2 $(ac+p^2=0)$ en 3 $(a+c=0)$ van figuur 1. De top van de parabool is het punt $a=c=\frac{p^2}{\mu^2}$. Het gebied, dat door de wrijving stabiel geworden is, is door een schuine harceering aangegeven.

Neemt de wrijving af, dan gaat de parabolische grenskromme (in figuur 1 door 4 voorgesteld) voor $\mu=0$ in de kromme 1 over, *zoodat een kleine wrijving het stabiliteitsgebied weinig vergroot* (hetgeen niet van zelf sprekend is). Voor zeer groote wrijving gaat de kromme 4 in de rechte $a+c=0$ over.

Op het getrokken deel der hyperbolische grenskromme $ac+p^2=0$ is één wortel r gelijk nul, terwijl van de overige wortels de bestaanbare deelen negatief zijn. *Het evenwicht is nu onvolledig gedempt stabiel.* Bij een evenwichtsverstoring wordt de beweging uitgeput, en nadert het deeltje meer en meer tot een punt ergens op de evenwichtsrechte gelegen (Zie Hoofdstuk I, § 2).

Op de parabolische grenskromme zijn twee der wortels van (93)

$$r = \pm\sqrt{-\frac{a+c}{2}}.$$

Deze zijn dus zuiver imaginair op het getrokken deel der kromme 4, tusschen Q en Q′ gelegen. *Daar is dus het evenwicht onvolledig gedempt stabiel.* Bij een evenwichtsverstoring nadert de beweging meer en meer tot een elliptische beweging om O, met een omloopstijd $2\pi\sqrt{\frac{2}{a+c}}$.

In de snijpunten Q en Q′ van beide grenskrommen heeft (93) twee gelijke wortels nul, zoodat dit wijst op een aperiodische verwijdering van O, en *het evenwicht dus labiel is.*

Hieruit volgt, *dat op de grens van het stabiele gebied het evenwicht stabiel is (en wel onvolledig gedempt), behalve in de punten* Q *en* Q′, *waar het evenwicht labiel is.*

§ 3. Roteerend krachtenveld met potentiaalfunctie.

Is er een potentiaalfunctie, dan is $p = 0$, zoodat (90), (91) en (92) worden

$$r^4 + 2\mu r^3 + (a + c + 2\omega^2 + \mu^2) r^2 + \mu(a + c - 2\omega^2) r + (a - \omega^2)(c - \omega^2) = 0, \quad (96)$$

$$(a - \omega^2)(c - \omega^2) = 0, \ldots \quad (97)$$

$$(a - c)^2 + 2(4\omega^2 + \mu^2)(a + c - 2\omega^2) = 0.. \quad (98)$$

Voor stabiel evenwicht is weer noodig, dat (96) geen variaties van teeken vertoont, zoodat

$$(a - \omega^2)(c - \omega^2) > 0$$

en

$$a + c - 2\omega^2 > 0$$

zijn moet. Uit (98) leidt men als derde voorwaarde af

$$(a - c)^2 + 2(4\omega^2 + \mu^2)(a + c - 2\omega^2) > 0,$$

waaraan echter altijd voldaan is, als de tweede ongelijkheid vervuld is. De eerste twee ongelijkheden zijn dus noodig en voldoende voor de stabiliteit, waaruit men afleidt *dat het eerste geval van stabiliteit stabiel gebleven is*, *maar het tweede geval van stabiliteit door de wrijving*, *hoe klein die ook zij*, *labiel geworden is.* (Zie Hoofdstuk I, § 7). De grootte der wrijving is voor de stabiliteit en labiliteit zonder invloed; *nu geeft dus een kleine wrijving direct een groote beperking van het stabiliteitsgebied.*

Op de grensrechten van het stabiele gebied is weer een der wortels nul, en *het evenwicht dus onvolledig gedempt stabiel.* Is b.v. $\omega^2 = a$, dan leidt men uit (89) af, dat $C = 0$ is, zoodat bij een evenwichtsverstoring de relatieve beweging wordt uitgeput, en het materieele deeltje meer en meer nadert tot een op de X-as gelegen punt.

In het punt S, waar beide stabiliteitsgebieden samenhangen, zijn twee wortels van (96) nul, hetgeen een aperiodische verwijdering van O, en dus *labiel evenwicht* geeft.

Op de grens van het stabiele gebied is het evenwicht dus stabiel (en wel onvolledig gedempt), *behalve in het punt* S, *waar het evenwicht labiel is.*

§ 4. Roteerend krachtenveld zonder potentiaalfunctie.

Het evenwicht kan alleen dan stabiel zijn, als (90) geen variaties van teeken vertoont, zoodat daarvoor

$$(a-\omega^2)(c-\omega^2)+p^2>0,$$

$$-4p\omega+\mu(a+c-2\omega^2)>0$$

en

$$a+c+2\omega^2+\mu^2>0$$

zijn moet. Als begrenzing van het stabiele gebied, heeft men het deel der hyperbolische grenskromme $(a-\omega^2)(c-\omega^2)+p^2=0$, dat in figuur 11 getrokken is, (waar een der wortels van (90) nul is), en het gedeelte der parabolische grenskromme, door (92) voorgesteld, waar (90) een paar zuiver imaginaire wortels heeft; welk deel van de parabool dit is, zullen we nu nagaan. Op de parabolische grenskromme voldoet één paar wortels aan

$$2\mu r^2-4p\omega+\mu(a+c-2\omega^2)=0,$$

terwijl dan de twee andere wortels voldoen aan

$$r^2+2\mu r+\frac{1}{2\mu}\{(a+c)\mu+6\mu\omega^2+2\mu^3+4p\omega\}=0.$$

Geen dier wortels heeft een positief bestaanbaar deel, als

$$-4p\omega+\mu(a+c-2\omega^2)>0$$

en

$$(a+c)\mu+6\mu\omega^2+2\mu^3+4p\omega>0$$

is.

Nu snijden de parabolische en de hyperbolische grenskromme elkaar in 4 punten, die twee aan twee op de rechten $-4p\omega+\mu(a+c-2\omega^2)=0$ en $(a+c)\mu+6\mu\omega^2+2\mu^3+4p\omega=0$ liggen, waaruit men gemakkelijk afleidt, *dat alleen dat deel der parabolische grenskromme tot begrenzing van het stabiele gebied dient, dat gelegen is tusschen die beide snijpunten Q en Q′ met de hyperbool, die het dichtst bij den top van de parabool gelegen zijn.* Het stabiele gebied ligt tusschen de beide takken van de hyperbool rechts van de parabool (die zijn opening naar links gekeerd heeft), en is in figuur 11 door een horizontale harceering aangegeven (de rechte $a+c+2\omega^2+\mu^2=0$ deelt den afstand der beide rechten $-4p\omega+\mu(a+c-2\omega^2)=0$ en $(a+c)\mu+6\mu\omega^2+2\mu^3+4p\omega=0$ middendoor, zoodat aan de ongelijkheid $a+c+2\omega^2+\mu^2>0$ van zelf voldaan is). De verbindingslijn der snijpunten Q en Q′ is de meest rechts ge-

legene der beide rechten $-4p\omega + \mu(a + c - 2\omega^2) = 0$ en $(a + c)\mu + 6\mu\omega^2 + 2\mu^3 + 4p\omega = 0$. (In figuur 11 is QQ′ de laatstgenoemde rechte).

Op de hyperbolische grenskromme is het evenwicht onvolledig gedempt stabiel. Bij een evenwichtsverstoring wordt de relatieve beweging uitgeput, zoodat het materieele deeltje tot relatieve rust nadert, en wel in een punt, dat van het evenwichtspunt verschilt.

Op de parabolische grenskromme is het evenwicht eveneens onvolledig gedempt stabiel. De relatieve beweging nadert tot een elliptische.

Alleen in de grenspunten Q en Q′ (waar twee wortels r van (90) nul zijn) *is het evenwicht labiel.*

Volgens (92) wordt de parabool voortdurend stomper, als μ toeneemt; voor zeer groote wrijving ($\mu = \infty$) gaat de parabool in de rechte $a + c - 2\omega^2 = 0$ over, d.i. de bestaanbare as der hyperbool. Neemt μ af, dan wordt de parabool spitser, en eindigt met naar rechts naar het oneindige te verschuiven, zoodat, als de wrijving afneemt, het stabiele gebied eindigt met in te krimpen, om voor $\mu = 0$ geheel verdwenen te zijn; dit is in overeenstemming met onze conclusie van Hoofdstuk I, § 2, dat zonder wrijving geen stabiliteit mogelijk is, voor $\omega p \neq 0$.

§ 5. Wrijving evenredig aan de absolute snelheid.

1. Men kan wrijving evenredig aan de absolute snelheid opvatten als wrijving evenredig aan de relatieve snelheid, gepaard met een rotatiekracht, waarvoor $p = -\mu\omega$ is. Men kan dus de formules, afgeleid voor relatieve wrijving, overnemen, als men p vervangt door $p - \mu\omega$. De hyperbolische grenskromme wordt dan

$$(a - \omega^2)(c - \omega^2) + (p - \mu\omega)^2 = 0,$$

en de parabolische grenskromme

$$\mu^2(a - c)^2 + 2\mu^2(4\omega^2 + \mu^2)(a + c) - 4(4\omega^2 + \mu^2)p^2 = 0,$$

terwijl QQ′ de meest rechts gelegene der beide volgende rechten is

$$-4p\omega + \mu(a + c + 2\omega^2) = 0,$$

en

$$4p\omega + 2\mu^3 + \mu(a + c + 2\omega^2) = 0.$$

De top van de parabool is nu het punt $a = c = \frac{p^2}{\mu^2}$, zoodat, als de wrijving afneemt, de parabool spitser wordt en de top tegelijkertijd naar rechts langs de rechte $a - c = 0$ naar het oneindige verschuift (als tenminste $p \neq 0$ is), zoodat voor $\mu = 0$ het stabiele gebied verdwenen is. Voor μ zeer groot gaat de parabool in de rechte $a + c = 0$ over; de hyperbool eindigt met zich naar het oneindige terug te trekken, terwijl haar asymptoten dezelfde blijven. Voor $\mu = \infty$ is dus het stabiele gebied overgegaan in het gebied rechts van (of op) de lijn $a + c = 0$ gelegen. Hieruit volgt, *dat*, *onafhankelijk van de grootte der rotatiesnelheid en der rotatiekracht*, *bij zeer groote absolute wrijving het evenwicht stabiel is voor* $a + c > 0$ *en labiel voor* $a + c < 0$.

2. In het bizondere geval $p = 0$, waarin het krachtenveld een potentiaalfunctie heeft, is de hyperbolische grenskromme

$$(a - \omega^2)(c - \omega^2) + \mu^2\omega^2 = 0,$$

terwijl de parabolische grenskromme

$$(a - c)^2 + 2(4\omega^2 + \mu^2)(a + c) = 0$$

steeds door het punt O gaat, en verder door de snijpunten van de hyperbool met de rechte QQ′, d. i.

$$a + c + 2\omega^2 = 0.$$

Bij vergrooting van μ verwijderen zich de beide takken der hyperbool, waarbij de punten Q en Q′ langs de rechte $a + c + 2\omega^2 = 0$ naar het oneindige verschuiven. Rechts van deze lijn breidt zich het stabiele gebied bij vergrooting van μ meer en meer uit, terwijl het links daarvan, ten gevolge van het stomper worden der parabool, ten deele ook inkrimpt. Nadert μ tot nul, dan nadert het stabiliteitsgebied tot het stabiliteitsgebied, dat we hebben zonder wrijving, zooals dat in figuur 2 geteekend is. *Bij een roteerend krachtenveld met potentiaalfunctie geeft dus een kleine absolute wrijving een kleine verandering van het stabiliteitsgebied* (ten deele uitbreiding, ten deele inkrimping), in tegenstelling met een kleine *relatieve* wrijving. In figuur 2 ligt het labiele gebied, dat door absolute wrijving (met een of andere μ) stabiel gemaakt kan worden, rechts van de lijn 3 ($a + c + 2\omega^2 = 0$) buiten de parabolische grenskromme 1 ($(a - c)^2 + 8\omega^2(a + c) = 0$).

EEN VRAAGSTUK BETREFFENDE STANGENVIERHOEKEN.

DOOR

F. J. VAES.
(Rotterdam.)

Wanneer van een vierhoek ABCD (fig. 1) een zijde AD (steunpuntenlijn) wordt vastgehouden, en een zijde AB (kruk) wordt bewogen, dan zullen ook de beide andere zijden BC (koppelstang) en CD (kruk) bewegen, en punten van BC, of vast verbonden aan BC, zullen dan kromme lijnen beschrijven, die in het algemeen van den zesden graad zijn. Zulk een kromme bezit in het algemeen dubbelpunten, en de vraag kan gesteld worden: *Wanneer het bewegende stelsel in twee geheel willekeurige standen geteekend wordt, het punt aan te geven, dat zich in die beide standen in een dubbelpunt van zijn baan bevindt.*

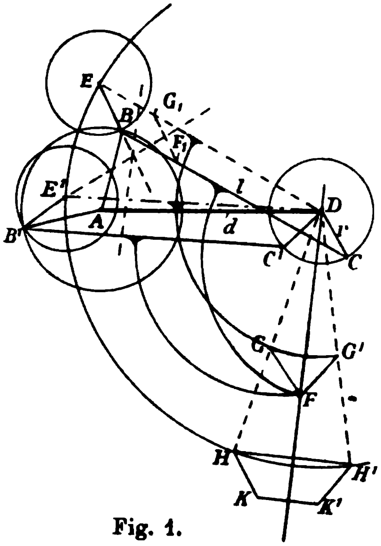


Fig. 1.

Om deze vraag op te lossen, is het noodig gebruik te maken van de theorie, besproken in de Voordracht over „Stangenvierhoeken", 5e Ned. Nat. en Gen. Congres 1895 (ook opgenomen in „de Ingenieur" van 21 Sept. 1895 en 18 Jan. 1896), welke hier in 't kort zal worden aangegeven.

In elken stand van den vierhoek ABCD kan men uit een der uiteinden, bijv. D, van de steunpuntenlijn (*d*) een lijn DE trekken evenwijdig en gelijk aan de koppelstang (*l*). De uiteinden van die hulplijnen liggen op een cirkelboog met D als

middelpunt. De vierhoek ABED werd door schrijver toegevoegd genoemd aan vierhoek ABCD.

Neemt men op cirkel l het punt E willekeurig, en beschrijft men daaruit een cirkel met straal gelijk aan CD (r), die cirkel AB (straal R) in B en in een ander punt snijdt, dan is door vierhoek ABED de stand van ABCD volkomen bepaald.

Om de plaats van een punt F_1 van de koppelstang BC te weten, waarvan de afstand tot C bekend is, behoeft men slechts $DG_1 = CF_1$ te maken, en G_1F_1 ⋕ EB te trekken.

Evenzoo: Om de plaats te kennen van een punt F, dat vast aan BC verbonden is, behoeft men slechts de plaats aan te geven van het overeenkomstige punt G van DE, om van daaruit GF ⋕ EB te trekken. De verbinding van het punt F aan BC, of van G aan DE, zal hierbij gedacht worden te zijn geschied met behulp van een uit C, resp. D beschreven cirkelboog; de reden van deze wijze van verbinding is aangegeven in de vermelde voordracht.

Onderstel, dat twee standen van vierhoek ABCD zijn aangegeven door hun toegevoegde mechanismen ABED en AB'E'D, en dat het punt F, dat vast aan de koppelstang BC verbonden is, zich in een der dubbelpunten van zijn baan bevindt.

Zijn G en G' de met F overeenkomende punten van DE en DE', dan is DG = DG', GF ⋕ EB, G'F ⋕ E'B'; en de gestelde vraag is opgelost, zoodra men de ligging van △ GG'F kan aangeven.

Onmiddellijk blijkt, dat GG' loodrecht zal moeten staan op een der deellijnen van de hoeken tusschen E'B' en EB.

Teekent men dus in cirkel l een koorde HH' = EE' en loodrecht op een dier deellijnen, dan vormt die koorde met de lijnen HK (⋕ EB) en H'K' (⋕ E'B') een gelijkbeenig trapezium.

Verkleint men DH en DH' in reden van HH' tot HH'—KK', dan is de plaats van GG' en dus ook van F gevonden.

Het punt F kan onmiddellijk worden gevonden als snijpunt van de lijnen, die de koorden CC' en BB' loodrecht middendoor deelen; (want △ FB'C' ≅ △ FBC).

De gegeven constructie is echter van voordeel, wanneer die deellijnen scherpe snijding geven, of wanneer niet de mechanismen zelve geteekend zijn, maar alleen hun geconjugeerden. Want men kan △ FGG' zoo teekenen, dat EB een der zijden is. De verhouding van de basis tot koorde EE' geeft dan de verhouding van straal DG tot l, en de hoek van basis en koorde is maat voor de lengte van den cirkelboog.

OVER OMGEKEERD GELIJKVORMIGE DRIEHOEKEN, PERSPECTIEF GELEGEN [1],

DOOR

H. A. W. SPECKMAN.
(Arnhem.)

1. „Als ABC en $A_1B_1C_1$ twee omgekeerd gelijkvormige, perspectief gelegen, driehoeken zijn en Q hun perspectivisch middelpunt is, dan is de meetkundige plaats der punten van driehoek ABC, die met gelijkstandige punten van $A_1B_1C_1$ op ééne lijn zijn gelegen met het perspectivisch middelpunt Q, eene gelijkzijdige hyperbool, gaande door A, B, C en Q."

„Op dezelfde wijze is de meetkundige plaats der punten van $A_1B_1C_1$, die met gelijkstandige punten van ABC op ééne lijn liggen, gaande door Q, eene gelijkzijdige hyperbool, gaande door A_1, B_1, C_1 en Q. Beide hyperbolen bevatten het dubbelpunt van omgekeerd-gelijkvormigheid der beide driehoeken, terwijl hare asymptoten evenwijdig zijn."

Bewijs. Zij P het punt van ABC, gelijkstandig met het perspectivisch centrum Q, behoorende tot $A_1B_1C_1$. Zijn A en A_1 twee gelijkstandige punten, collineair met Q. Zij Δ het dubbelpunt van omgekeerd-gelijkvormigheid der beide driehoeken. Dan zijn de driehoeken $A\Delta P$ en $A_1\Delta Q$ omgekeerd gelijkvormig. De gelijkstandige lijnen PA en QA_1 draaien met gelijke hoeksnelheid in tegengestelden zin om de vaste punten P en Q, als de gelijkstandige punten A en A_1 zich verplaatsen. De lijnen PA en QA draaien dus met gelijke hoeksnelheid in tegengestelden zin en de meetkundige plaats van A is eene gelijkzijdige hyperbool, waarvan PQ eene middellijn is, terwijl het dubbelpunt Δ, het centrum van perspectief Q, benevens de hoekpunten A, B en C op die hyperbool zijn gelegen.

---

[1]) Bewijs der in April 1903 op het Congres te 's-Gravenhage meegedeelde stellingen.

Evenzoo is de meetkundige plaats van A_1 van driehoek $A_1B_1C_1$, bij verplaatsing van A, eene gelijkzijdige hyperbool, gaande door A_1, B_1, C_1, Q en Δ, hebbende tot middellijn P_1Q, waarbij P_1 het met Q gelijkstandige punt is, als Q beschouwd wordt als een punt van ABC. Beide hyperbolen hebben dus de punten Q en Δ gemeen. Daar de asymptoten der hyperbolen evenwijdig zijn aan de dubbellijnen van omgekeerd-gelijkvormigheid der beide driehoeken, zijn deze asymptoten-paren dus onderling evenwijdig.

2. „Twee gelijkstandige lijnen van twee omgekeerd gelijkvormige driehoeken, perspectief gelegen, zijn richtingen van toegevoegde middellijnen der gelijkzijdige hyperbolen, omschreven aan de driehoeken en gaande door het centrum van perspectief."

Bewijs. De dubbellijnen van omgekeerd-gelijkvormigheid zijn deellijnen der hoeken, gevormd door twee gelijkstandige lijnen der beide driehoeken. Daar de asymptoten evenwijdig zijn aan de dubbellijnen, zijn ze ook evenwijdig aan de deellijnen van de hoeken van gelijkstandige lijnen. Daar in eene gelijkzijdige hyperbool de deellijn van den hoek, gevormd door twee toegevoegde middellijnen evenwijdig loopt aan een der asymptoten, zijn dus twee gelijkstandige lijnen der beide driehoeken richtingen van toegevoegde middellijnen.

De beide driehoeken en hun omgeschreven gelijkzijdige hyperbolen zijn dus symmetrisch ten opzichte van eene der beide asymptoten-richtingen.

3. „Zijn J en J_1 gelijkstandige punten van de hyperbolen ABCQ en $A_1B_1C_1Q$ en is J'_1 het symmetrische punt van J_1 ten opzichte van het middelpunt M_1 van de hyperbool $A_1B_1C_1Q$, dan zijn J en J'_1 collineair met het dubbelpunt van omgekeerd-gelijkvormigheid."

Bewijs. De punten J_1 en J'_1 zijn diametraal gelegen ten opzichte van M_1. Dus zijn ΔJ_1 en $\Delta J'_1$ supplementaire koorden van de gelijkzijdige hyperbool $A_1B_1C_1\Delta$. De lijnen $J\Delta$ en $J_1\Delta$ zijn gelijkstandige lijnen der beide driehoeken, dus richtingen van toegevoegde middellijnen. Supplementaire koorden hebben ook richtingen van toegevoegde middellijnen. De lijnen $J\Delta$ en en $J'_1\Delta$ vallen samen en J, J'_1 en Δ zijn derhalve collineair.

Evenzoo zal het punt J', diametraal ten opzichte van J gelegen op de hyperbool $ABC\Delta$, collineair zijn met J_1 en met Δ.

Gevolg. Zijn JJ' en $J_1J'_1$ gelijkstandige middellijnen der hyperbolen, dan snijden de lijnen JJ'_1 en J_1J' elkaar in het dubbelpunt van de omgekeerd gelijkvormige driehoeken.

4. „Zijn ABC en $A_1B_1C_1$ twee omgekeerd gelijkvormige perspectivische driehoeken en neemt men den symmetrischen driehoek $A'B'C'$ van ABC ten opzichte van het middelpunt M van de gelijkzijdige hyperbool $ABCQ$, dan zijn $A'B'C'$ en $A_1B_1C_1$ omgekeerd gelijkvormig en perspectivisch, terwijl het centrum van perspectief het dubbelpunt Δ van omgekeerd-gelijkvormigheid der driehoeken ABC en $A_1B_1C_1$ is. Het dubbelpunt van omgekeerd-gelijkvormigheid der driehoeken $A'B'C'$ en $A_1B_1C_1$ is het centrum van perspectief Q van ABC en $A_1B_1C_1$."

Bewijs. Volgens (3) gaan de lijnen $A'A$, $B'B$, $C'C$, door het punt Δ; de driehoeken $A'B'C'$ en $A_1B_1C_1$ zijn dus omgekeerd-gelijkvormig en perspectivisch. De lijnen AA_1, BB_1, CC_1 gaan door Q; dus dit is het dubbelpunt van $A'B'C'$ en $A_1B_1C_1$. Hieruit volgt, dat alle eigenschappen, die bestaan voor ABC en $A_1B_1C_1$, hunne overeenkomstigen hebben voor $A'B'C'$ en $A_1B_1C_1$, en evenzoo voor ABC en $A'_1B'_1C'_1$.

5. „Van twee omgekeerd gelijkvormige perspectivische driehoeken zijn twee gelijkstandige punten, gelegen op de omgeschreven gelijkzijdige hyperbolen, concyclisch met hunne diametraal gelegen punten."

Bewijs. Noemen we de gelijkzijdige hyperbolen $ABCQ$ en $A_1B_1C_1Q$ *geassocieerde* hyperbolen. Zijn J en J_1 gelijkstandige punten ervan, J' en J'_1 diametraal gelegen tegenover J en J_1 in die hyperbolen. Daar JJ'_1 en $J'J_1$ elkaar snijden in het dubbelpunt Δ en de driehoeken $J\Delta J'$ en $J_1\Delta J'_1$ gelijkstandige punten tot hoekpunten hebben, zijn deze driehoeken omgekeerd gelijkvormig, dus

$$J\Delta : J_1\Delta = J'\Delta : J'_1\Delta, \text{ of } J\Delta \times J'_1\Delta = J_1\Delta \times J'\Delta.$$

De punten J, J_1, J' en J_1, liggen dus op een cirkelomtrek.

Gevolg. Neemt men de symmetrische punten van de hoekpunten A en A_1 der driehoeken ten opzichte van de middelpunten M en M_1 der geassocieerde hyperbolen, en zijn deze punten A' en A'_1, dan zijn A, A_1, A' en A'_1 concyclisch.

6. „Zijn ABC en $A_1B_1C_1$ twee omgekeerd gelijkvormige driehoeken, willekeurig gelegen ten opzichte van elkaar, en K en K_1 twee gelijkzijdige hyperbolen, omgeschreven aan ABC en $A_1B_1C_1$, die tot richtingen van asymptoten hebben de richtingen der dubbellijnen van omgekeerd-gelijkvormigheid der beide driehoeken"

„Is J_1 een punt van de hyperbool K_1 en trekt men uit de hoekpunten van ABC lijnen, respectievelijk evenwijdig aan J_1A_1, J_1B_1 en J_1C_1, dan snijden deze lijnen elkaar in één punt J'. Dit punt is diametraal gelegen ten opzichte van het punt J, gelijkstandig met J_1 op de hyperbool ABCJ."

Bewijs. De lijnen AJ en A_1J_1 (fig. 1) zijn gelijkstandige lijnen der beide driehoeken; dus maken ze gelijke hoeken met de asymptoten der hyperbolen en zijn richtingen van toegevoegde middellijnen van eene dier hyperbolen. Is J' het tweelingpunt van J, dan zijn J en J' uiteinden van een middellijn der hyperbool K, zoodat AJ en AJ' supplementaire koorden zijn, dus richtingen van toegevoegde middellijnen. Daar AJ' evenwijdig is aan A_1J_1, terwijl AJ en A_1J_1 richtingen van toegevoegde middellijnen waren, gaat dus de lijn, door A evenwijdig aan A_1J_1 getrokken, door het punt J', diametraal tegenover het punt J, dat gelijkstandig was met J_1.

Evenzoo gaan de lijnen, door B en C getrokken respectievelijk evenwijdig aan B_1J_1 en C_1J_1, door het punt J'. Deze eigenschap blijft bestaan als de driehoeken omgekeerd gelijkvormig en *perspectivisch* zijn. Daar in dat geval de punten J' en J_1 collineair waren met het dubbelpunt Δ van gelijkvormigheid, heeft men:

„Zijn ABC en $A_1B_1C_1$ twee omgekeerd gelijkvormige *perspectief* gelegen driehoeken, J en J_1 gelijkstandige punten van hunne geassocieerde gelijkzijdige hyperbolen en trekt men door de hoekpunten van ABC lijnen evenwijdig aan A_1J_1, B_1J_1 en C_1J_1, dan snijden deze elkaar in één punt J'. De punten J', en J_1 en het dubbelpunt Δ zijn collineair. Op dezelfde wijze zijn door de hoekpunten van $A_1B_1C_1$ lijnen te trekken, respectievelijk evenwijdig aan AJ, BJ en CJ, die elkaar zullen snijden in één punt, enz."

7. „De hoogtepunten van twee omgekeerd gelijkvormige en perspectief gelegen driehoeken zijn collineair met het centrum van perspectief."

B e w ij s. Daar de gelijkzijdige hyperbolen, omschreven aan de driehoeken, ook de hoogtepunten bevatten, zijn de hoogtepunten ook gelijkstandige punten van de geassocieerde hyperbolen dier driehoeken en dus collineair met het centrum van perspectief.

8. „De orthologische middelpunten van twee omgekeerd gelijkvormige, perspectief gelegen driehoeken, zijn collineair met het centrum van perspectief."

B e w ij s. Zooals bekend is, zijn twee omgekeerd gelijkvormige driehoeken orthologisch, dit wil zeggen: de loodlijnen, uit de hoekpunten van den eersten neergelaten op de gelijkstandige zijden van den tweeden, gaan door één punt. Dit punt is gelegen op den omgeschreven cirkel van den eersten driehoek. Op dezelfde wijze is er een overeenkomstig punt gelegen op den omgeschreven cirkel van den tweeden driehoek. Deze punten zijn de *orthologische middelpunten* en gelijkstandige punten voor beide driehoeken. Zijn nu de driehoeken ook perspectief gelegen, dan liggen deze punten op ééne lijn met het centrum van perspectief. Zijn ABC en $A_1B_1C_1$ (fig. 4) gegeven driehoeken, Q het centrum van perspectief, H en H_1 hunne hoogtepunten, N en N_1 hunne orthologische middelpunten, dan loopen de lijnen AN, BN en CN respectievelijk evenwijdig aan A_1H_1, B_1H_1 en C_1H_1. De lijnen AN, BN en CN sneden elkaar, zooals we boven opmerkten, in één punt, gelegen op den omgeschreven cirkel van den driehoek ABC. Maar daar H_1 een punt is van de gelijkzijdige hyperbool $A_1B_1C_1H_1Q$, zullen volgens (6) de lijnen AN, BN en CN elkaar moeten snijden in één punt, gelegen op de gelijkzijdige hyperbool ABCQ en wel diametraal tegen over H. Het punt N is dus het *vierde snijpunt* van den *omgeschreven cirkel* van driehoek ABC en van de gelijkzijdige hyperbool ABCQ. Op dezelfde wijze zal het orthologisch middelpunt N_1 van driehoek $A_1B_1C_1$ het vierde snijpunt zijn van cirkel $A_1B_1C_1$ en gelijkzijdige hyperbool $A_1B_1C_1Q$. De punten N en N_1, die gelijkstandige punten der hyperbolen zijn, liggen dus collineair met Q.

9. „De lijnen, die bij twee omgekeerd gelijkvormige, perspectief gelegen driehoeken, het orthologisch middelpunt van den eenen driehoek verbinden met het hoogtepunt van den

anderen, snijden elkaar in het dubbelpunt van omgekeerd-gelijkvormigheid der beide driehoeken."

Bewijs. Volgens (6) zal, daar AN, BN en CN respectievelijk evenwijdig zijn aan A_1H_1, B_1H_1 en C_1H_1, het punt N diametraal gelegen zijn ten opzichte van H. Het midden M van NH is dus het centrum der hyperbool ABCN. Evenzoo zal N_1 diametraal ten opzichte van H_1 gelegen en het midden M_1 van N_1H_1 het centrum der hyperbool $A_1B_1C_1N_1$ zijn. De lijnen NH en N_1H_1 zijn dus gelijkstandige middellijnen der hyperbolen, Daar de driehoeken ook perspectief gelegen zijn, zullen volgens het gevolg van (3) de lijnen HN_1 en H_1N elkaar snijden in het dubbelpunt van omgekeerd-gelijkvormigheid. Volgens (5) zijn dan de punten N, H, N_1 en H_1 *concyclisch.*

10. „De as van perspectief van twee omgekeerd gelijkvormige, perspectief gelegen driehoeken, staat loodrecht op de lijn, die de orthologische middelpunten verbindt."

Bewijs. Toonen we dit eerst aan voor twee omgekeerd gelijkvormige driehoeken, waarvan twee gelijkstandige hoekpunten samenvallen. Zijn ABC en AB_2C_2 (fig. 2) deze twee driehoeken. Is S het snijpunt van BC en A_2C_2, dan is AS de as van perspectief. Is Q het snijpunt van BB_2 en CC_2, dan is Q het perspectivisch middelpunt. Zijn N en N_2 de orthologische middelpunten, dan zijn dit volgens (8) gelijkstandige punten, collineair met Q. Is D_2 het snijpunt van AN met B_2C_2, dan is $AD_2S = 90°$. Is D het snijpunt van AN_2 met BC, dan is $ADS = 90°$. Zijn E en E_2 de voetpunten der loodlijnen, uit N en N_2 op AS neergelaten, dan kunnen we aantoonen, dat E en E_2 samenvallen. Immers de driehoeken ADS en AN_2E_2 zijn gelijkvormig, daar ze twee hoeken gelijk hebben; dus

$$AS : AN_2 = AD : AE_2 \text{ of } AS \times AE_2 = AN_2 \times AD \quad . \; . \; 1)$$

Evenzoo is $AD_2S \infty ANE$; dus

$$AS : AN = AD_2 : AE \text{ of } AS \times AE = AN \times AD_2. \; . \; . \; 2)$$

Eindelijk zijn de driehoeken ADN en $A_2D_2N_2$ gelijkvormig, daar D en D_2 evenals N en N_2 gelijkstandige puntenparen zijn; dus is

$$AN : AN_2 = AD : AD_2 \text{ of } AN \times AD_2 = AN_2 \times AD.$$

De evenredigheden 1) en 2) geven derhalve

$$AS \times AE_2 = AS \times AE,$$

dus E en E_2 vallen samen en de lijn AS staat loodrecht op NN_2 of op QN.

Zij $A_1B_1C_1$ nu een driehoek, homothetisch met $A_2B_2C_2$, met Q tot centrum van homothetie, dan zijn ABC en $A_1B_1C_1$ omgekeerd gelijkvormig en perspectivisch met centrum Q. De orthologische middelpunten N en N_1 zijn collineair met Q, dus de punten N, N_1 en N_2 liggen op éóne lijn. De as van perspectief der driehoeken ABC en $A_2B_2C_2$ is evenwijdig aan die der driehoeken ABC en $A_1B_1C_1$, en daar de eerste as loodrecht staat op de lijn NQ, staat de tweede as ook loodrecht op NQ. De as van perspectief van ABC en $A_1B_1C_1$ staat dus loodrecht op N_1N_2 (fig. 4).

11. Zooals bekend is, zullen de lijnen, uit de hoekpunten van *een* van twee omgekeerd gelijkvormige driehoeken, evenwijdig getrokken aan de overeenkomstige zijden van den *anderen* driehoek, elkaar snijden in één punt, gelegen op den omgeschreven cirkel van den eersten driehoek. Men verkrijgt aldus op ieder der omgeschreven cirkels één punt. Deze punten zijn gelijkstandige punten der beide driehoeken. Men noemt ze *metapolen.*

De isogonaal getransformeerde van een gelijkzijdige hyperbool, omschreven aan een driehoek, is een middellijn van den omgeschreven cirkel van den driehoek. Zijn V en V′ de snijpunten dier middellijn met de gelijkzijdige hyperbool, omgeschreven aan ABC, dan zijn de isogonaal toegevoegden van AV en AV′ de richtingen der asymptoten dier hyperbool. Is N het vierde snijpunt van de hyperbool en den omgeschreven cirkel, dan zijn AN, BN en CN evenwijdig aan de isogonaal toegevoegden der richting VV′ in de hoekpunten A, B en C ten opzichte van de hoeken van den driehoek.

12. „De lijnen die het vierde snijpunt N van eene gelijkzijdige hyperbool, omschreven aan driehoek ABC, en den omgeschreven cirkel van dien driehoek verbinden met de snijpunten V en V′ van dien cirkel met de isogonaal getransformeerde dier hyperbool, dus NV en NV′ (fig. 3), zijn richtingen van asymptoten dier hyperbool.”

B e w ij s. Toonen we aan, dat de isogonaal toegevoegde van CV evenwijdig aan NV′ en de isogonaal toegevoegde van

CV′ evenwijdig aan NV is. Snijdt de isogonaal toegevoegde van CV den cirkel in F, en is CE evenwijdig aan VV′, dan is $\angle$ NCF = $\angle$ ECV = $\angle$ CVV′, dus boog NF = boog V′C of NV′ // CF en NV′ is richting eener asymptoot. Evenzoo is NV richting eener asymptoot.

13. Noemen we de lijnen, die in twee omgekeerd gelijkvormige driehoeken orthologisch middelpunt met metapool verbinden, orthologische middellijnen, dan heeft men: „Als twee driehoeken ABC en $A_1B_1C_1$ omgekeerd gelijkvormig zijn en perspectivisch met centrum Q, is de isogonaal getransformeerde der gelijkzijdige hyperbool ABCQ evenwijdig aan de orthologische middellijn van $A_1B_1C_1$ en de isogonaal getransformeerde der gelijkzijdige hyperbool $A_1B_1C_1Q$ evenwijdig aan de orthologische middellijn van ABC.

Bewijs. Zijn N en N_1 de orthologische middelpunten, R en R_1 de metapolen. De lijnen NR en N_1R_1, die gelijkstandig zijn, zijn dus richtingen van toegevoegde middellijnen van een dier hyperbolen (fig. 3).

Zij q isogonaal toegevoegd aan Q ten opzichte van ABC, dan is Oq of VV′ de isogonaal getransformeerde der hyperbool ABCQ. Alsdan is in driehoek VNV′ de deellijn van hoek VON evenwijdig aan NV′, daar hoek VNV′ recht is. Maar NV′ is richting eener asymptoot, dus de richtingen VO of VV′ en NO maken gelijke hoeken met eene asymptoot. Dus zijn VV′ en NR richtingen van toegevoegde middellijnen en, daar NR en N_1R_1 dit eveneens zijn, is VV′ evenwijdig aan N_1R_1. Op dezelfde wijze bewijst men dat de isogonaal getransformeerde van hyperbool $A_1B_1C_1Q$ ten opzichte van ABC evenwijdig aan NR is (fig. 4).

14. „De loodlijnen, uit de middens der zijden van één van twee omgekeerd gelijkvormige driehoeken neergelaten op de gelijkstandige zijden van den tweeden driehoek, snijden elkaar in één punt, gelegen op het midden der lijn, die metapool en hoogtepunt van dien driehoek verbindt.”

Bewijs. Zijn m_a, m_b en m_c (fig. 4) de middens der zijden van ABC, dan is driehoek $m_am_bm_c$ de complementaire driehoek van ABC. Hij is omgekeerd gelijkvormig met $A_1B_1C_1$. Zij T het orthologisch middelpunt van driehoek ABC ten opzichte van $A_1B_1C_1$ en N het orthologisch middelpunt van ABC ten opzichte van $A_1B_1C_1$; dan zijn T en N gelijkstandige punten.

Deze zijn collineair met het gemeenschappelijk zwaartepunt Z der driehoeken ABC en $m_a m_b m_c$, met de verhouding NZ : ZT = 2 : 1. Daar echter de driehoeken ABC en HNR ook een zelfde zwaartepunt hebben, ligt T op het midden van RH.

15. „De metapool M van driehoek $m_a m_b m_c$ ten opzichte van $A_1B_1C_1$ is het midden van NH van driehoek ABC."

Bewijs. Daar R en M de metapolen zijn van ABC en $m_a m_b m_c$ ten opzichte van $A_1B_1C_1$ zijn het gelijkstandige punten, dus RZ : ZM = 2 : 1. Derhalve is M het midden van zijde NH van driehoek RHN.

Zijn de driehoeken ABC en $A_1B_1C_1$ perspectivisch, dan is M het middelpunt van de gelijkzijdige hyperbool ABCQ; dus M is het complementaire punt van de metapool R in driehoek ABC.

16. „De spiegeldriehoek $A_pB_pC_p$ van $A_1B_1C_1$ (fig. 4) ten opzichte van de as van perspectief van twee omgekeerd gelijkvormige perspectivische driehoeken ABC en $A_1B_1C_1$, is perspectivisch met driehoek ABC, terwijl het perspectivisch middelpunt het snijpunt U is van de lijn, die de orthologische middelpunten van ABC en $A_1B_1C_1$ verbindt, met den omgeschreven cirkel van driehoek ABC."

Bewijs. Zij L de as van perspectief van $A_pB_pC_p$ en $A_1B_1C_1$ en noemen we de snijpunten van BC, CA, AB met die as α, β, γ, dan is $\angle A_p\gamma\beta = 180° - \angle A_pAB$, daar $\angle \gamma A_p\beta = \angle \gamma A_1\beta$ is; dus de punten A_p, A, β en γ zijn op een cirkel gelegen.

$$\angle A_p\gamma\beta = 180° - \angle A_p\gamma\alpha = 180° - \angle A_1\gamma\alpha.$$

Dus is $\angle A_pA\beta = \angle A_1\gamma\alpha$. Maar $\angle A_pA\beta$ is $= A_pAC$.

Derhalve is $\angle A_pAC = \angle A_1\gamma\alpha$.

Nu is $\angle A_1\gamma\alpha$ de hoek, die de zijde A_1B_1 maakt met L, en daar NC ⊥ op A_1B_1 en U_1N ⊥ op L is, zal $\angle A_pAC = 180° - \angle CNU$ zijn.

Daar A, C, N en U op een cirkel liggen, is $\angle UAC = 180° - \angle CNU$, dus $\angle A_pAC = \angle UAC$.

Het punt U ligt dus op de lijn AA_p.

Op dezelfde wijze wordt bewezen, dat U ligt op de lijnen BB_p en CC_p.

De driehoeken $A_pB_pC_p$ en ABC zijn dus perspectief gelegen met U als middelpunt. Evenzoo is U_1 het middelpunt van

perspectief van $A_1B_1C_1$ en den spiegeldriehoek van ABC ten opzichte van L.

17. „De as van perspectief L van twee omgekeerd gelijk vormige perspectief gelegen driehoeken deelt den afstand tusschen de metapolen middendoor en staat loodrecht op de lijn, die de orthologische middelpunten verbindt.”

Bewijs. $\angle AUR = \angle ANR = \angle A_1N_1R_1 = \angle A_1U_1R_1$.

A_1A_p is evenwijdig aan UU_1, daar ze beiden loodrecht op L staan. Het trapezium $A_1U_1UA_p$ is dus gelijkbeenig. De lijn L deelt A_1A_p rechthoekig middendoor, dus U_1U wordt ook door L rechthoekig middendoor gedeeld. Daar U en U_1 de projecties van R en R_1 zijn op de lijn NN_1, zal L den afstand RR_1 dus ook middendoor deelen en loodrecht op NN_1 staan.

18. „De as van perspectief L, de machtlijn der eirkels ABC en $A_1B_1C_1$, benevens de lijnen US en U_1S_1 gaan door één punt E.”

Bewijs. Van drie cirkels gaan de machtlijnen door één punt. De machtlijn van ABC en $A_pB_pC_p$ is US; de machtlijn van $A_pB_pC_p$ en $A_1B_1C_1$ is de lijn L. Zij E het snijpunt van L en US, dan gaat dus de machtlijn van ABC en $A B_1C_1$ door E. Evenzoo gaat U_1S_1 door E.

V 9.

ERRATUM.

In de aankondiging van Bolyai's „Appendix”, blz. 79 van dit deel van het *Nieuw Archief*, is opgegeven, dat dit (oorspronkelijk in het duitsch) als aanhangsel van een werk zijns vaders verscheen Dit is een misverstand. Zoo als L. Schlesinger ons uit Klausenburg schrijft, bevat nl. dit *verscheen* een onjuistheid. Wel werd het Appendix door den zoon in het Duitsch geschreven; doch op verzoek van Wolfgang vertaalde Johann het (1829) in het latijn en deze vertaling werd door Wolfgang in zijn „Tentamen” gepubliceerd. Ja, er bestaat zelfs tot heden geen duitsche vertaling van het Appendix; want Frischauf's geschrift (1872) is geen vertaling, maar een vrije bewerking. S.

BIBLIOGRAPHIE.

Exposé synthétique des principes fondamentaux de la Nomographie, par MAURICE D'OCAGNE, 62 blz., 4°. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

In dit werk geeft de schrijver eene nadere uiteenzetting van de beginselen, waarop zijne eigenaardige graphische rekenmethode berust. Zijn „Traité de Nomographie" richtte zich voornamelijk tot degenen, die van zijne theorie een practisch gebruik zouden kunnen maken. Vandaar dat in dit handboek eerst de meest eenvoudige gevallen worden nagegaan en dat eerst daarna geleidelijk de theorie wordt ontwikkeld. Hier wordt de omgekeerde weg gevolgd. Zoo algemeen mogelijk wordt het vraagstuk van de nomographische voorstelling der vergelijkingen gesteld, en uit de oplossing van dit vraagstuk worden de in de practijk gebruikelijke methoden afgeleid.

De verschillende nomogrammen worden tot bepaalde typen teruggebracht. Van zulke typen blijken er twintig te zijn. Bij een daarvan zijn de gecoteerde elementen in één vlak weergegeven, bij de negentien andere worden tot dit doel twee ten opzichte van elkaar bewegelijke vlakken gebruikt, en elk willekeurig nomogram kan door combinatie uit deze typische nomogrammen worden geconstrueerd.

In het eerste hoofdstuk wordt beschreven, hoe men in het vlak de elementen, hetzij punten of lijnen, met één, twee of meer coteeringen kan aangeven. Bedraagt het aantal coteeringen niet meer dan twee, dan zijn voor het punt die coteeringen niet anders dan zijne kromlijnige coördinaten in het een of andere aangenomen stelsel. Bij een grooter aantal coteeringen is de plaats van het punt in het vlak niet zoo onmiddellijk bepaald. Stelsels van „lignes condensées" moeten worden gebruikt, en het is door middel van eene aaneenschakeling van functies van twee veranderlijken, dat het element van *n* coteeringen in het vlak wordt vastgelegd.

Daarna wordt in het tweede hoofdstuk de nomographische

voorstelling in één vlak behandeld. Het algemeen vraagstuk is het volgende: „Zoo gegeven is eene vergelijking met n veranderlijke grootheden, hoe moet men dan in hetzelfde vlak elementen met p en met $n-p$ coteeringen aanbrengen, opdat men op het eerste gezicht, en wel door te letten op samenvallen, incidentie of aanraking in den algemeensten zin dier elementen, kan beoordeelen, welke groepen van p coteeringen te zamen met eene groep van $n-p$ coteeringen de gegeven vergelijking bevredigen?"

De oplossing van dit vraagstuk wordt gegeven; tot toelichting worden enkele eenvoudige voorbeelden behandeld. Het blijkt, dat elke vergelijking, met hoeveel veranderlijken ook, die in een enkel vlak nomographisch kan worden voorgesteld, door een eindig aantal bewerkingen steeds kan worden opgelost. Intusschen wordt in vele gevallen vereenvoudiging verkregen door van een tweede bewegelijk vlak gebruik te maken.

In het derde hoofdstuk wordt geschetst, welk voordeel daarmede wordt behaald. Elk der beide vlakken bevat voor zich een deel der elementen, die nu, en dit is van belang, ieder een geringer aantal coteeringen bezitten. De stand van het tweede vlak ten opzichte van het eerste is door drie incidenties of aanrakingen telkens bepaald. Waargenomen wordt eene vierde aanraking, en uit die waarneming wordt de oplossing der voorgelegde vergelijking afgeleid. Het onderzoek leidt tot negentien typische gevallen. In het bijzonder trekt de aandacht het geval, waarbij het tweede vlak teruggebracht wordt tot eene enkele rechte lijn, wier punten geen enkele coteering dragen. Als voorbeeld wordt onder andere behandeld de oplossing der kubische vergelijking $z^3 + nz^2 + pz + q = 0$. Voor alle waarden van n, p en q kan men de waarde van z aflezen door over het nomogram in het vaste vlak eene rechte lijn (lineaal of draad) tusschen twee bepaalde punten te trekken.

Het algemeenste nomogram, dat men zich voorstellen kan, wordt verkregen met behulp van een willekeurig aantal vlakken, maar deze constructie komt ten slotte neer op het gebruik van een aantal nomogrammen van twee vlakken elk, zoodat alles weder tot de negentien typische gevallen kan worden teruggebracht.

Tot eene juiste waardeering van de theoretische, zoowel als van de practische beteekenis der Nomographie zal de lezing van het beschouwde geschrift ongetwijfeld bijdragen. Kl.

H. DULAC. Recherches sur les points singuliers des équations différentielles. Thèse de doctorat. Een deel in 4°, 125 blz. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

Uit de onderzoekingen van Poincaré en van Picard is gebleken, hoe in het algemeen in de omgeving van den oorsprong het verloop is der integraalkrommen van de vergelijking $X(x,y)\,dx + Y(x,y)\,dy = 0$, als de krommen $X = 0$ en $Y = 0$ in den oorsprong een enkelvoudig snijpunt vertoonen. In dat geval is de vergelijking te brengen in den vorm: $(x + \ldots.)\,dy + (-\lambda y + \ldots)\,dx = 0$ en het verloop der integralen hangt geheel af van den aard der constante λ; voornamelijk is het dan de vraag of deze constante is nul, negatief, positief, geheel of het omgekeerde van een geheel.

In het eerste deel van deze verhandeling worden de verschillende gevallen opnieuw behandeld en de uitkomsten aangevuld, door ook te denken aan complexe waarden der veranderlijken. Het blijkt, dat in een enkel dier gevallen het bestaan der integralen in de bedoelde omgeving nog niet kan worden aangetoond.

Het tweede gedeelte der verhandeling betreft de onderstelling, dat de krommen $X = 0$ en $Y = 0$ in den oorsprong een snijpunt van hoogere orde hebben. Eene bepaalde categorie van integralen, waarbij $y : x^{\mu}$ onafhankelijk van μ bij afnemende x en y tot eene eindige of oneindige grens nadert, wordt opgespoord. Andere meer ingewikkelde integraalvormen blijken in sommige gevallen te voldoen. Over het algemeen leidt het aannemen van een veelvoudig snijpunt der krommen $X = 0$ en $Y = 0$ tot ongeveer dezelfde uitkomsten, ten aanzien der door den oorsprong gaande integraalkrommen, als de onderstelling, dat $X = 0$, $Y = 0$ slechts een enkelvoudig snijpunt in den oorsprong hebben. KL.

GUSTAVE ROBIN. Œuvres scientifiques, réunies et publiées par LOUIS RAFFY. Théorie nouvelle des fonctions exclusivement fondée sur l'idée de nombre. Een deel in 8°, 211 blz. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

De oorspronkelijke denkbeelden aangaande de grondslagen der analyse, die Robin vervulden in den tijd, dat hij deze wetenschap onderwees aan de Faculté des Sciences te Parijs, worden in dit werk door Raffy toegelicht en uiteengezet. Robin

kon zich niet vereenigen met de wijze, waarop gewoonlijk de analyse wordt opgebouwd. Volgens hem heeft men ten onrechte in de analyse, de wetenschap der getallen, allerlei aan deze vreemde begrippen overgebracht, die men ontleent aan de studie van bestaande grootheden. Hij beschouwt de analyse als eene voortzetting en uitbreiding der gewone rekenkunde, uitbreiding in dien zin, dat er breuken met onbegrensd grooten noemer in de beschouwing worden opgenomen. Het is dus een leer der getallen, en aan haar ligt niet anders dan het begrip getal ten grondslag. Geen postulaten, zooals in de meetkunde, zijn noodig voor haren verderen opbouw. Oneindig kleinen en onmeetbare getallen zijn er niet. Er zijn grootheden, die onderling onmeetbaar zijn, en alleen het feit, dat bij voortgezette verdeeling van eene gegeven grootheid, de deelen niet meer worden waargenomen, heeft geleid tot de opvatting van eene oneindig kleine grootheid. De bepalingen, die men gewoonlijk voor „onmeetbaar getal" en voor „oneindig klein getal" gegeven vindt, verdienen den naam van bepaling niet. Zoo is het volgens Robin niet logisch om te vragen naar een onmeetbaren wortel der vergelijking $f(x) = 0$. Men kan slechts verlangen eene onbegrensde rij van getallen met ten slotte willekeurig kleine verschillen te bepalen, van dien aard, dat de rij der substitutie-resultaten in $f(x)$ afnemende breuken zijn, die eindelijk zoo klein worden, als men begeert.

De uitwerking van zulke denkbeelden levert eene theorie, die hier en daar van de bestaande afwijkt, maar die natuurlijk, wanneer men haar op de verhoudingen van bepaalde grootheden gaat toepassen, weer geheel tot dezelfde gevolgtrekkingen leidt als de meer gangbare beschouwing.

Mogen voorzeker de opvattingen van Robin van groot vernuft getuigen, bij den beoefenaar der wiskunde zullen zij wel eens hier en daar de vraag doen rijzen, of het onderscheid tusschen zijne theorie en de gebruikelijke nu altijd wel betreft den inhoud, of eigenlijk meer den uiterlijken vorm. KL.

Sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres et de la géométrie par H. LAURENT. Recueil Scientia, no. 20. Paris, C. Naud, 1902, 8°, 68 blz.

De schrijver is van meening, dat het gebruik om de wiskunde te gronden op eenige van zelf duidelijke stellingen of

axioma's het nadeel heeft, dat men zich niet altijd helder kan voorstellen, in hoeverre deze stellingen met elkaar in verband staan, wellicht van elkander afhangen, of overbodig zijn. Volgens hem heerscht er in dit opzicht dikwijls willekeur of verwarring. Hij wil aantoonen, dat er een andere en betere weg tot het doel leidt, die uitgaat van de definitie der hoeveelheid en van eenige weinige onderstellingen, die de axioma's vervangen. Zijne eerste onderstelling (hypothese) luidt: „Je raisonne juste" en daarop voortbouwende, construeert hij eene algebra der hoeveelheden, waarin weldra het getal, als aanwijzer en teeken der hoeveelheid gedefinieerd, deze laatste vervangt. Daarna laat hij zien, hoe analytisch elke meetkunde zonder verdere axioma's ontwikkeld kan worden. Hij behoeft daartoe slechts de Euclidische verplaatsing, den afstand van twee punten, den hoek van twee lijnen, enz. analytisch te definieeren. Maar kan men op deze wijze zonder eenig axioma iedere stelling der gewone Euclidische meetkunde bewijzen, geenszins is het mogelijk om de identiteit van de gewone meetkunde onzer ruimte met zijne analytische uitkomsten vast te stellen.

Met alle waardeering van de pogingen van den schrijver, valt het te betwijfelen, of zijne denkbeelden voorloopig veel ingang zullen vinden. KL.

La compressibilité des gaz réels par L. DÉCOMBE. Recueil Scientia, no. 21. Paris. C. Naud, 1903, 8°, 99 blz.

In het kort wordt in dit werkje eene beschrijving gegeven van de proefnemingen, gedaan ten einde de samendrukbaarheid der gassen te leeren kennen. Beginnende met de onderzoekingen van Boyle en van Mariotte, verhaalt de schrijver, hoe men in lateren tijd gaandeweg opmerkte, dat ook bij normale temperatuur het verband van volume en drukking niet zoo eenvoudig was, als men zich aanvankelijk had voorgesteld. Hij zet uiteen, hoe Andrews voor het eerst stelselmatig den invloed der temperatuur op de samendrukbaarheid naging, en welke de resultaten waren zijner proeven en van die van Amagat. Daarna geeft de schrijver een overzicht van de pogingen, die men in het werk gesteld heeft om gedeeltelijk empirisch, gedeeltelijk op grond van theoretische beschou-

wingen tot eene karakteristieke vergelijking $f(p, v, t) = 0$ te geraken.

Uitvoerig bespreekt hij de toestandsvergelijking van van der Waals, de wetten der overeenkomstige toestanden, die daaruit voortvloeien, en de vergelijking, die volgens van der Waals voor gasmengsels geldt.

Een aantal diagrammen geven een beeld van de uitkomsten der beschreven proeven. KL.

J. W. GIBBS. Diagrammes et surfaces thermodynamiques. Traduction de M. G. Roy avec une introduction de M. B. Brunhes. Recueil Scientia, no. 22. Paris, C. Naud, 1903. 8°, 86 blz.

In dit werkje wordt gegeven de vertaling van de twee eerste verhandelingen van Gibbs, die in 1873 verschenen zijn in deel II der Transactions of the Connecticut Academy. Het onderzoek van de thermodynamische eigenschappen der stoffen heeft aanleiding gegeven tot velerlei graphische en meetkundige voorstellingen, en in de bovengenoemde verhandelingen heeft Gibbs zijne zeer oorspronkelijke denkbeelden dienaangaande uiteengezet. Voor de physici in ons land, waar de studie der thermodynamica zulk eene vlucht heeft genomen, zal de fransche vertaling van Gibbs's geschriften, in het oorspronkelijke moeielijk bereikbaar, naast de duitsche vertaling, door Ostwald uitgegeven, welkom zijn. KL.

Annuaire pour l'an 1904, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars. 732 blz.

Ingevolge nieuwe door het Bureau genomen beslissingen bevat het jaarboek voor 1904 uitgebreide tafels, die betrekking hebben op physica en chemie. In het volgende jaar zullen die gegevens worden afgewisseld door opgaven aangaande de meteorologie, het muntwezen, de aardrijkskunde en de statistiek. Zoo mogelijk is het aantal en de aard der opgaven, vergeleken met die van vorige jaren, nog uitgebreider geworden.

Eene aanbeveling van deze hoogst nuttige en welbekende uitgave is voorzeker overbodig. Het jaarboek bevat aan het slot eene „Note sur la conférence géodésique internationale tenue à Copenhague en août 1903" door M. Bouquet de la

Grye, gevolgd door eene verhandeling van 53 blz. van M. P. Hatt, getiteld: Explication élémentaire des marées. Kl.

Beginselen der Waarschijnlijkheidsrekening en van de theorie der fouten door N. C. Grotendorst. Breda, de Kon. Mil. Academie, 1903, 8°, 185 blz.

Dit leerboek, bestemd voor aanstaande artillerie-officieren, geeft vooraf inleidende beschouwingen over combinatieleer, over de waarschijnlijkheidsintegraal en over de reeks van Stirling. Dan worden in twee hoofdstukken de waarschijnlijklijkheid à priori en de waarschijnlijkheid à posteriori behandeld, waarna overgegaan wordt tot de theorie der fouten en de methode der kleinste kwadraten. De toepassingen hebben zooveel mogelijk betrekking op de artillerie.

De wijze van behandeling is duidelijk en bevattelijk. Een betrekkelijk groot aantal goed gekozen vraagstukken geeft den lezer gelegenheid zich te oefenen en het geleerde eigen te maken. Uit alles blijkt, dat de schrijver bovenal het oog op de toepassing en het in praktijk brengen der waarschijnlijkheidsrekening heeft gericht. Zeer streng is de afleiding, die voor de reeks van Stirling wordt gegeven, niet te noemen. Dat die reeks, evenals die in formule (15), blz. 17, divergeert, wordt met geen woord vermeld. Het is den schrijver voldoende, dat zijne reeksen praktisch bruikbaar zijn. Kl.

Traité élémentaire de Géométrie à quatre dimensions et introduction à la Géométrie à *n* dimensions, par E. Jouffret. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

Eenigen tijd geleden gaven we in dit tijdschrift (tweede reeks, Dl. VI, blz. 68) een overzicht van Prof. Schoute's „Mehrdimensionale Geometrie"; thans ligt weder een werk voor ons, dat den wiskundige wil inleiden in dit voor velen onbekende en toch zoo aantrekkelijke gebied. Het werk is op zich zelf volledig en telt ruim 200 bladzijden; uit het hierna volgende zal blijken, hoezeer het verschilt van het vorige.

In den vorm van een Avant-propos wordt eerst het recht van bestaan van de meetkunde met meer dan drie afmetingen bepleit; dit hoofdstuk is tegelijk wiskundig en wijsgeerig gesteld en doet ons zien, dat nog altijd deze tak van meetkunde bepleiting behoeft, daar niet ieder haar als gelijkwaardig met de andere deelen van wiskunde beschouwt. De schrijver doet den

lezer een grooten dienst, door aan het einde van dit hoofdstuk het schema van het geheele werk te geven. Daaruit blijkt, dat hij zich beperkt tot de meetkunde met vier afmetingen; alleen aan het slot wordt een inleidend hoofdstuk tot de meetkunde met meer dan vier afmetingen opgenomen.

Als methode past de schrijver die van Descartes toe en nu volgen onder de namen: Définitions, Intersection et parallélisme, Perpendicularité, Quelques théorèmes, Systèmes de coordonnées, Les angles, eenige hoofdstukken, die een uitbreiding zijn van het eerste gedeelte der analytische meetkunde met drie afmetingen, verkregen door aan de begrippen rechte lijn en plat vlak dat van ruimte toe te voegen. Uit dit aangenomen standpunt volgt, dat de schrijver met vergelijkingen werkt; de vergelijking $a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$ of $A = 0$ stelt eene ruimte voor, de verbinding van twee dergelijke vergelijkingen $A = 0$, $B = 0$ geeft een plat vlak; $A = 0$ $B = 0$, $C = 0$ geven eene rechte lijn; $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ bepalen de coördinaten van een punt. Gaat men nu na, hoe de analytische meetkunde der ruimte door toevoeging eener veranderlijke uit die van het platte vlak wordt afgeleid, dan kan men zich de methode van uitbreiding, in dit geval gevolgd, duidelijk voorstellen. Tevens wordt daardoor het karakter van dit eerste gedeelte bepaald; het is analytisch en velen zullen dit een bezwaar achten. Daar tegenover zij opgemerkt, dat op deze wijze vrij snel in de ruimte met vier afmetingen de gewone herleidingen doorzien worden. Bij de beschouwingen over coördinaten wordt ook aan de homogene coördinaten een plaats ingeruimd.

Op deze eerste afdeeling volgt een hoofdstuk over de wezens (les êtres) van de meetkunde met vier afmetingen. Hierin worden de krommen van enkelvoudige, dubbele en drievoudige kromming beschreven, de oppervlakken en de hyperoppervlakken (gebogen ruimten) steeds met voorbeelden toegelicht, zooals het kwadratisch hyperoppervlak, de hypersfeer, de hyperkegels, enz. Het hoofdstuk evenwel, dat velen lezers het meeste belang zal inboezemen, is het achtste, getiteld: Les polyëdroïdes. Dit onderwerp wordt breedvoerig uitgewerkt en met vele figuren toegelicht, voorstellende projectiën op en doorsneden met de ruimten met drie afmetingen. Veel aandacht wordt gewijd aan de regelmatige polyedroiden C^8, C^5, C^{16}, C^{600}, C^{24}, C^{120}, en daarbij wordt ook gebruik gemaakt van de uitkomsten verkregen door onze landgenooten P. H. Schoute en S. L. van Oss. De schrijver, erkennende, dat de stof zeer

rijk is en het onderwerp reeds zeer volledig bestudeerd, is er in geslaagd er een zeer duidelijk overzicht van te geven.

De behandeling der meetkunde met vier afmetingen is hiermede afgeloopen; nog volgt evenwel een hoofdstuk over de toepassingen en eindelijk een laatste getiteld: Hors de l'étendue. De wiskundige toepassingen laat de schrijver in het eerste dezer hoofdstukken verder rusten, hij gaat over tot de toepassingen op de physische wetenschappen; we kunnen dit dus buiten beschouwing laten. In het laatste hoofdstuk eindelijk doet de schrijver een eersten stap in de richting der meetkunde van *n* afmetingen; het moet als een inleiding dienen voor hen, die de studie verder wenschen door te voeren.

Bovenstaand overzicht doet zien, dat dit voor ons liggende „Traité" van het vroeger besprokene verschilt voornamelijk door de meer beperkte opgave, die de schrijver zich stelde, maar ook door het meer analytisch karakter. Als inleiding kan het voorzeker, ook wegens zijne duidelijkheid en vloeienden stijl, goede diensten bewijzen; aan hen, die òf wel eenig inzicht op dit gebied wenschen te verkrijgen, òf wel, voor zij een meer omvangrijk of vollediger werk ter hand nemen, een voorbereiding op prijs stellen, worde het dan ook aanbevolen.

J. C.

Traité de Chimie Physique de Jean Perrin. Tome I: Les principes. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

Het thans verschenen deel vormt een eerste deel van een omvangrijker arbeid. De schrijver zegt zelf, dat het eerste deel, slechts handelende over de grondslagen der physisch-chemische wetenschap, uit den aard der zaak nogal abstract is uitgevallen, maar dat de behandelingswijze der volgende deelen een geheel andere zal zijn. Wij mogen het werk van den schrijver dus niet beoordeelen naar dit eerste deel, maar zullen ons oordeel moeten opschorten, tot de andere, meer zaakrijke deelen verschenen zijn.

Ons echter zuiver bepalende tot den inhoud van het deel, dat voor ons ligt, kan ons oordeel bezwaarlijk gunstig zijn. De schrijver zelf karakteriseert zijn arbeid door te verklaren, dat ieder principe is behandeld met „la même défiance de tout mystère et de toute métaphysique". Hiertoe acht hij een geheele wijziging in onze wetenschappelijke begrippen noodig. Waarop die wijziging neerkomt zullen wij toelichten door de bespreking van het begrip *kracht*, een begrip, waarvan de

oude behandelingswijze door den schrijver voor zuivere „métaphysique" wordt verklaard en geheel gelijk gesteld met het ontologisch bewijs van het bestaan van God (Inleiding, bl. XI).

Over dit begrip *kracht* handelt het eerste hoofdstuk, dat 50 van de nog geen 300 bladzijden van het thans verschenen deel bevat. In dit hoofdstuk wordt eerst aangetoond, dat spanningen van koorden onderling vergelijkbare en meetbare grootheden zijn. Vervolgens wordt als definitie ingevoerd: „Indien aan een punt van een lichaam een gespannen koord is bevestigd, dan zeggen wij, dat daar een kracht op werkt, die gemeten wordt door de spanning van het koord." Het bewijs, dat deze krachten volgens het parallelogram zijn samen te stellen, wordt achterwege gelaten, daar het bewijs „n'introduit aucune notion physique nouvelle." Uit het parallelogram worden nu de evenwichtsvoorwaarden opgemaakt. Hierbij kan echter de opmerking niet achterwege blijven, dat lichamen in evenwicht kunnen verkeeren, zonder dat de krachten, uitgeoefend door de eraan bevestigde koorden evenwicht maken (b.v. door de zwaarte der lichamen zelf). Het is dan alsof aan het lichaam een „fil invisible" is vastgemaakt. Dergelijke krachten worden „forces de seconde espèce" genoemd. Met de zoo ingevoerde krachten wordt dan ongeveer eender gewerkt, als altijd anders met krachten wordt gedaan, behalve dat de schrijver het noodig vindt bij bijna iedere afzonderlijke kracht te vermelden, dat een gelijke werking kon verkregen worden door middel van een door een gewicht gespannen koord.

De schrijver verklaart in de inleiding (pag. XV): „je tiens à déclarer que je serai surtout heureux si quelques uns de ceux qui lisent ce livre deviennent par là plus incapables de se payer de mots." Ik voor mij kan niet inzien, dat het boek deze uitwerking zou kunnen hebben, maar *zoo* het die had, zou er dan geen reden zijn, den schrijver zelf eens aan te raden zijn eigen boek grondig te lezen?

Hoofdstuk III, handelende over „Le principe d'équivalence et la notion d'énergie", is ongeveer van dezelfde kracht als hoofdstuk I. Ook in het begrip energie heeft de schrijver iets metaphysieks, of iets mysterieus, of misschien wel beide ontdekt. Hij vermijdt daarom het woord energie zooveel mogelijk en waar wij zouden zeggen „de toestel heeft een hoeveelheid A arbeid verricht", zegt hij „de toestel heeft een beweging uitgevoerd, waarbij het een gewicht van 1 K.G. over een hoogte H zou hebben kunnen optillen."

Iets belangrijker zijn de hoofdstukken waarin begrippen, die

meer speciaal tot het gebied der physische chemie behooren, worden besproken, als temperatuur, druk, chemische potentiaal (hieronder verstaat hij de grootheid, die in ons land veelal thermodynamische potentiaal wordt genoemd), vrije energie, entropie, het principe der toename der entropie, de phasenregel van Gibbs, enz. Als bijzonderheden van de behandelingswijze van deze onderwerpen zou ik willen noemen, dat aan de niet omkeerbare processen meer, aan de omkeerbare minder aandacht wordt geschonken dan veelal geschiedt, en dat de vrije energie, — als $\int pdv$ voor een omkeerbaar isothermisch proces — wordt ingevoerd vóór wij met het begrip entropie hebben kennis gemaakt. Deze twee bijzonderheden komen mij voor voordeelen te zijn; aan den anderen kant treden de isothermische processen misschien wel wat te veel op den voorgrond, en verzuimt de schrijver wel eens het er nadrukkelijk bij te vermelden, wanneer zijn uitspraken alleen op isotherme processen van toepassing zijn.

Zoo lezen wij op bl. 196: „Il faut et il suffit, pour la stabilité de l'équilibre d'un système assujetti à ne fournir et à recevoir aucun travail, que l'énergie utilisable du système soit minimum. Ainsi l'étude de la fonction ψ nous a bien fourni un critérium de stabilité qui, valable pour un système isolé mécaniquement, est à fortiori valable pour un système complétement isolé."

Het komt mij voor, dat het hierbij niet overbodig zou zijn geweest te vermelden, dat dit toch alleen blijft gelden als wij alleen isotherme veranderingen mogelijk achten, zoodat het systeem niet thermisch geïsoleerd mag zijn, in welk geval geen isotherme, maar adiabatische veranderingen zouden kunnen optreden.

Ten slotte zij vermeld, dat de in het boek gebruikte wiskunde tot een minimum is beperkt, wat misschien aanbeveling verdient met het oog op chemische lezers, die weinig gewoon zijn met wiskundige formules te werken, maar wat toch niet kan nalaten te veroorzaken, dat het betoog bijna overal in beknoptheid en dikwijls in strengheid te wenschen overlaat.

J. D. van der Waals Jr.

Theorie der vielfachen Kontinuitat. Von † L. Schläfli. Herausgegeben im Auftrage der Denkschriften-Kommission der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft,

von J. H. Graf, Bern. Auf kosten der Gesellschaft und mit Subvention des Bundes gedruckt von Zürcher & Furrer, Zürich (Bd. 28, erste Hälfte der *Denkschriften*). Kommissien-Verlag von Georg & Co. in Basel, Genève und Lyon.

In een gesprek na tafel beweerde eens een mijner kennissen, dat onder de volkeren van Europa de Zwitsers den meesten aanleg voor vierdimensionale beschouwingen moeten bezitten. „Even gemakkelijk als het ons valt" — zoo ongeveer was de redeneering — „ons een derde afmeting voor te stellen, hoewel we ons toch slechts in ons vlakke land in twee afmetingen bewegen, even gemakkelijk is het den zich in drie afmetingen bewegenden bewoner van een bergland zich een vierde afmeting te denken." Voor de aangehaalde bewering spreekt — afgescheiden van de motiveering — de verschijning van het bovenstaande in de nabijheid van het Berner Oberland geconcipieerde werk op schitterende wijs. Want deze eerst in 1901 verschenene doch reeds in de jaren 1850—1852 te boek gestelde verhandeling, overtreft in wetenschappelijke waarde een goed deel van alles, wat tot heden op het gebied der meerdimensionale geometrie verscheen. Dit moge tot verontschuldiging strekken, dat hier wordt afgeweken van den regel, alleen van nieuw verschenen *boekwerken* verslag te geven.

De aan de verschijning van het geschrift verbonden „historia morbi" wordt door den bewerker in een „Vorbemerkung" gegeven. Het werd in 1852 door den schrijver aangeboden aan de Akademie van Wetenschappen te Weenen, doch wegens den grooten omvang — het werd op 23 vel kwarto geschat — niet aangenomen. En hiermee begon het gesukkel. Nadat Steiner het gezien had, raadde deze Schläfli er een uittreksel van te bewerken voor Crelle's journaal; maar hiertoe was Schläfli niet te bewegen. En hoewel Steiner in 1856 berichtte, dat de uitgever Reimer beloofd had de geheele verhandeling in het bedoelde journaal op te nemen en Schläfli genoegen genomen had met het hem toegelegde honorarium, kwam er niets van de uitgave, omdat — naar een uitlating van Steiner te oordeelen — de nieuwe redacteur van het tijdschrift, Borchardt, er nu tegen was. Hoe dit zij, de verhandeling bleef — nu Schläfli's eerste opgewondenheid voorbij was — in portefeuille en verscheen eerst een halve eeuw later, na schrijvers dood. Zoo heeft deze dan het diepe leed ondervonden, dat hem ten deel valt, die zijn' tijd vooruit is: de vruchten zijner rijpste studie niet wereldkundig te mogen maken. En hiervoor zal natuurlijk

het succes van de indeeling der kubische oppervlakken slechts een geringe schadeloosstelling geweest zijn, wijl deze, hoe verdienstelijk ook, naar mijne meening, bij lange na niet zoo van genie spreekt als de „Theorie der vielfachen Kontinuität."

De bewerker J. H. Graf, hoogleeraar aan de Universiteit te Bern, heeft gemeend het nagelaten werk van zijn grooten ambtsvoorganger „im ursprünglichen Wortlaut ohne jeden Zusatz oder irgend eine Anmerkung" te moeten uitgeven. En naar mijne meening terecht. Want hierdoor heeft de uitgave tevens historische waarde en bovendien: mij is niet gebleken, dat er bepaald verouderde gedeelten in voorkomen. Wel is de voorstelling geheel gericht op het vermijden van alle meetkundige spreekwijzen, wat in 1850 natuurlijk meer raison d'être had dan tegenwoordig, en noemt de schrijver bijv. het stelsel van waarden x, y, z, . . . der n veranderlijken, die aan n lineaire vergelijkingen voldoen, een „oplossing" in plaats van „de coördinaten van een punt der n-dimensionale ruimte" en zegt hij „dat het kwadraat van den afstand van twee oplossingen gelijk is aan de som der kwadraten van de verschillen der gelijknamige veranderlijken." Maar dit is slechts een verschil in vorm, dat nergens tot eenig verschil in wezen leidt. Aanstonds, bij de bespreking der regelmatige polytopen zal dit duidelijk in het oog springen.

De verhandeling is gesplitst in drie deelen, hoewel zij op vier deelen aangelegd schijnt te zijn. In de tegenwoordige terminologie behandelen deze drie deelen achtereenvolgens de lineaire ruimten, de bolvormige ruimten en de algemeene kwadratische ruimten, terwijl een passus der inleiding op een nog beraamde infinitesimaalgeometrie van hoogere krommen, oppervlakken, gebogen ruimten heenwijst. Voor we van deze afdeelingen eenige kenmerkende bijzonderheden vermelden, geven we echter — om den lezer in staat te stellen over de verwerkte materie te oordeelen — zeer kort de titels der paragrafen aan.

I. *Lineaire ruimten:* 1. Bepalingen. 2. Rechthoekige assentransformatie. 3. Hoek van twee richtingen. 4. Kortste afstand. 5. Inhoud van het parallelotoop. 6. Scheefhoekige assentransformatie. 7. Inhoud der pyramide. 8. Inhoud van het simplex uitgedrukt in de ribben. 9. Transformatie van inhoudsintegralen. 10. Polytopen. 11. Hun inhoud. 12. Projecties van polytopen van lager afmeting. 13. Hun inhoud. 14. Hun rechthoekige transformatie. 15. Verhouding van inhouden van polytopen. 16. Verdeeling der ruimte R_n door

ruimten R_{n-1}; het aantal deelen. 17. Regelmatige polytopen in R_4. 18. Regelmatige polytopen in R_n.

II. *Spherische ruimten:* 19. Polyspheer. Inhoud en oppervlak. 20. Het spherisch simplex. 21. Hulpstelling. 22. Inhoud van het spherisch simplex. 23. Een hiermee verwante functie. 24. Reductie van den inhoud. 25. Ontbinding van het algemeene spherische simplex in enkelvoudige. 26. Herleiding van het geval in R_{2n+1} tot dat in R_{2n}. 27. Perioden. 28 Toepassingen. 29. Een bijzonder geval. 30. Rationale vierdimensionale spherische simplexen. 31. Een ander bijzonder geval. 32. De uitbreiding der stelling van Euler. 33. Regelmatige spherische simplexen. 34. Onderzoek van de 600-cellen. 35. Eutactische stralen.

III. *Kwadratische ruimten:* 36. Middelpunt. 37. Hoofdassen. 38. Toegevoegde middellijnen. 39. Raakruimten. 40. Hoofdassen van middelpuntsdoorsneden. Confocale ruimten. 41. Voortzetting. 42. Herleide vorm der overeenkomstige differentiaalvergelijking. 43. Hoofdkrommingen. 44. Orthogonale stelsels. 45. Toepassing op massabepaling. 46. Geodetische lijnen. 47. Transformatie van differentiaal-parameters. 48. Potentiaal. 49. Potentiaal van een ellipsoïdale kwadratische ruimte. 50. Massaverdeeling bij bekende potentiaal. 51. Toepassing. 52. Stelkundige oplossing der vergelijking $\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = MV$. 53. Bepaling van zekere willekeurige functies van $n - 1$ veranderlijken. 54. Herleiding van veelvoudige integralen.

We stippen thans eenige algemeene en bijzondere punten aan, en merken dan in de eerste plaats op, dat de behandeling geheel analytisch is. Naar analogie van de analytische meetkunde in de ruimte, behandelt de schrijver vergelijkingen van den eersten graad met n onbekenden; zelfs spreekt hij van een „oplossing", ook dan als geen vergelijking voorhanden is, om daaronder een stelsel van waarden dier onbekenden te verstaan. Er wordt geen coördinatenstelsel aangegeven en geen enkele figuur geteekend. Werkelijk zou deze niet te rijmen geweest zijn met de slotregels van de aankondiging der verhandeling, die de schrijver voorop stelt: „Ich hoffe durch die vorliegende Abhandlung faktisch gezeigt zu haben, dass in der reinen Analysis die Konstruktion nicht weniger mit Erfolg angewandt werden kann, als in der Geometrie." Bij deze opvatting is een rechthoekige assentransformatie een transformatie, waarvoor Σx_i^2 invariant is, wordt de cosinus van den hoek tusschen

twee polynomen $\Sigma a_i x_i$ en $\Sigma b_i x_i$ bepaald door de betrekking $\Sigma a_i^2 . \Sigma b_i^2 . \cos^2 \varphi = (\Sigma a_i b_i)^2$, enz.

Wat thans gewoonlijk parallelotoop en polytoop heet, wordt door Schläfli „paralleloschem" en „polyschem" genoemd. En nu is al dadelijk deze stelling merkwaardig, dat de inhoud van een „paralleloschem" gelijk is aan den determinant van de rechthoekige projecties zijner ribben. Deze eenvoudige stelling, die mij onbekend was, wordt eigenlijk met behulp van beschouwingen over invarianten bewezen. Zij staat in nauw verband tot de bekende determinanten-uitdrukking van den sinus van een meerdimensionalen ruimtehoek — vergelijk den teller van de breuk in het rechterlid der vergelijking 95) van mijn leerboek —, zooals bij het in het vierkant brengen van deze laatste, in verband met den regel der vermenigvuldiging van determinanten, onmiddellijk blijkt.

Bij de behandeling der polytopen geeft de schrijver de op n afmetingen uitgebreide stelling van Euler voor convexe polytopen aan, die, als a_k het aantal der begrenzende ruimten R_k van dit polytoop aanwijst, in den vorm

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots + (-1)^{n-1} a_{n-1} + (-1)^n a_n = 1$$

verschijnt. Niet aan Stringham maar aan Schläfli komt dus de eer dezer uitbreiding toe.

We vermelden een paar bijzonder algemeene stellingen:

„Is in de ruimte R_n een rechthoekig assenstelsel en een begrensd deel S eener ruimte R_m $(m < n)$ gegeven, dan is het kwadraat van den inhoud van S gelijk aan de som der kwadraten van de projecties S′ van S op de $(n)_m$ projectieruimten met m afmetingen. Van deze $(n)_m$ projecties S′ zijn er $(n-m)m+1$ onderling onafhankelijk, de overigen door deze bepaald."

„Is in de ruimte R_n een rechthoekig assenstelsel en in elk van twee ruimten $R_m (m < n)$ een begrensde figuur S en T gegeven, dan is het product van S met de projectie van T op S gelijk aan de som der $(n)_m$ producten van de gelijknamige projecties S′ en T′ op de projectieruimten met m afmetingen."

Met betrekking tot de hoeken bepaalt de schrijver zich tot de beschouwing van twee ruimten R_n, die slechts een punt gemeen hebben en samen dus een R_{2n} bepalen. Hij komt dan — zeker ook voor de eerste maal — tot de n hoeken gelegen in loodrecht op elkaar staande standvlakken, waarvan de beenen in elk der beide ruimten een rechthoekig coördinatenstelsel vor-

men. Het algemeene geval van twee ruimten R_p, R_q, die een R_r gemeen hebben, wordt niet behandeld.

Het aantal deelen, waarin de ruimte R_n door k ruimten R_{n-1} verdeeld wordt, blijkt $1 + (k)_1 + (k)_2 + , . . (k)_n$ te zijn. Met behulp van de stelling van Euler leidt de schrijver daarop de zes regelmatige cellen der ruimte R_4 af, die gekenmerkt worden door het symbool (m, n, p), waarbij m het aantal zijden van elk zijvlak, n het aantal der in een hoekpunt uitkomende zijvlakken van een begrenzend polyeder en p het aantal der door een ribbe gaande polyeders aangeeft. Van deze zes worden dan de vijfcel (3, 3, 3) en de zestiencel (3, 3, 4) onmiddellijk afgehandeld. Daarop geeft de zeshonderdcel (3, 3, 5) aanleiding tot eenige ontwikkeling, wijl de schrijver de laagsgewijze groepeering der hoekpunten in ruimten loodrecht op een middelpuntsdiagonaal onderzoekt en tot het bekende resultaat komt. Merkwaardig genoeg geeft hij daarbij, wat, voor zoover mij bekend is, zelfs nog niemand *na* hem gedaan heeft, het overeenkomstige stervormige polytoop op; aanstonds kom ik hierop terug. Vervolgens worden de eenvoudigste coördinaten van de hoekpunten van de vierentwintigcel (3, 4, 3) aangegeven en uit dualistische beschouwingen de achtcel (4, 3, 3) en de honderdtwintigcel (5, 3, 3) — met haar stervormig analogon — afgeleid. Na een overzicht van de maatverhoudingen dier regelmatige cellen, besluit het eerste deel met de vermelding der drie regelmatige polytopen van R_n voor $n > 4$.

Wat het tweede en derde deel van de onderhavige verhandeling betreft, wensch ik mij tot twee punten te beperken, de boven reeds aangestipte stervormige polytopen van R_4 en de uitbreiding van het begrip spherisch exces.

Bij de beschouwing der regelmatige sterveelhoeken treedt naast het aantal van hoeken of zijden een tweede getal, het *soorttal* op, dat aanwijst, hoe dikwijls de omtrek van den omgeschreven cirkel overdekt wordt door de centrale projecties der zijden op dien omtrek. Evenzoo bepaalt men bij de dikwijls naar Poisson genoemde regelmatige sterpolyeders onzer ruimte, hoe dikwijls het oppervlak van den omgeschreven bol overdekt wordt door de centrale projectie van de zijvlakken op dit oppervlak, welk soorttal bij twee de waarde drie, bij de twee anderen de waarde zeven heeft. En nu is het aan Schläfli gelukt aan te toonen en te verifieeren, dat het overeenkomstige getal bij de twee eenig mogelijke regelmatige sterpolytopen 191 bedraagt. Het zij mij veroorloofd omtrent de bedoelde verifi-

catie in eenige bijzonderheden te treden, wijl zij mogelijk gemaakt werd door een bijzonder eenvoudige voorstelling der coördinaten van de 120 hoekpunten der zeshonderdcel. Door zich namelijk met betrekking tot de punten van de bolruimte, die den oorsprong van coördinaten tot middelpunt en de eenheid tot straal heeft, van het polaire coördinatenstelsel

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\cos\varphi, \sin\varphi\cos\psi, \sin\varphi\sin\psi\cos\chi, \sin\varphi\sin\psi\sin\chi)$$

te bedienen, was hij in staat de coördinaten van de 120 hoekpunten te geven in den uiterst beknopten vorm

$$(a) : \varphi = 0 \quad \dots\dots\dots \quad 1$$

$$(b) : \varphi = 6a, \quad \begin{bmatrix} \psi = 0, & \beta, & \pi - \beta, \ \pi \\ \chi = & 12\varkappa a, & 6(2\varkappa + 1)a, \end{bmatrix} \quad \dots\dots \quad 12$$

$$(c) : \varphi = 10a, \quad \begin{bmatrix} \psi = & \gamma, & \delta, \ \pi - \delta, \ \pi - \gamma \\ \chi = & 6(2\varkappa + 1)a, \ 6(2\varkappa + 1)a, & 12\varkappa a, \ 12\varkappa a \end{bmatrix} \quad \dots \quad 20$$

$$(d) : \varphi = 12a, \quad \psi \text{ en } \chi \text{ als onder } (b) \quad \dots\dots \quad 12$$

$$(e) : \varphi = 15a, \quad \begin{bmatrix} 2\chi = & \gamma, & \pi - \gamma, & \pi, \ \pi + \gamma, & 2\pi - \gamma \\ 2\chi = & 24\varkappa a, & 12(2\varkappa + 1)a, & 6(2\varkappa + 1)a, \ 124\varkappa a, & 2(2\varkappa + 1)a \end{bmatrix} \quad 30$$

$$(f) : \varphi = 18a, \quad \psi \text{ en } \chi \text{ als onder } (b) \quad \dots\dots \quad 12$$

$$(g) : \varphi = 20a, \quad \psi \text{ en } \chi \text{ als onder } (c) \quad \dots\dots \quad 20$$

$$(h) : \varphi = 24a, \quad \psi \text{ en } \chi \text{ als onder } (b) \quad \dots\dots \quad 12$$

$$(i) : \varphi = \pi \quad \dots\dots\dots \quad 1$$

$$120$$

In dit tabelletje staat a kortheidshalve voor het dertigste deel van π, terwijl β, γ, δ bepaald zijn door de betrekkingen

$$\cos\beta = \tfrac{1}{5}\sqrt{5}, \quad \operatorname{tang}\gamma = 3 - \sqrt{5}, \quad \operatorname{tang}\delta = 3 + \sqrt{5};$$

bovendien zal het wel niet noodig zijn toe te voegen, dat $\varkappa$ staat voor 1, 2 ... en de cijfers 1, 12, ... 1 de boven aangestipte ligging der 120 hoekpunten aanwijzen. En nu zijn de 600 viervlakken naar de hoekpunten $20ab^3$, $20b^3c$, $30b^2c^2$, $60bc^2d$, $60c^2de$, $60cde^2$, $20ce^3$, $60de^2f$, enz. Evenzoo blijkt dan, dat het overeenkomstige sterpolytoop begrensd wordt door $20af^3$, $20cf^3$, $30c^2f^2$, $60c^2fh$, $60c^2eh$, $60ce^2h$, $20ce^3$, $60be^2h$, enz., van welke 600 viervlakken er 191 de as OX_1 aan dezelfde zijde van den oorsprong snijden. Dit laatste wordt dan uitgemaakt met behulp van de stelling, dat elk punt *binnen* het viervlak met de hoekpunten $(x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, x_3^{(i)}, x_4^{(i)})$ wordt voorgesteld door $\xi_i \sum_{k=1}^{k=4} p_k = \sum_{k=1}^{k=4} p_k x_k^{(i)}$ voor $i = 1, 2, 3, 4$, waarbij de vier grootheden p_k hetzelfde teeken hebben. Zoo ontstaat het getal 191 uit $7af^3$, $20d^3g$, $30c^2f^2$, $24bdg^2$, $30c^2eh$, $60be^2g$ en $20ce^3$.

Wat het tweede punt, de uitbreiding van het begrip spherisch exces, aangaat, moet ik mij tot een enkele aanduiding bepalen, zoo ik wil, dat deze aankondiging van Schläfli's voortreffelijke verhandeling een eenvoudige aankondiging blijve. Zoo als bekend is, bestaat er een nauw verband tusschen het bewijs, dat de inhoud van een bolvormigen driehoek zich in het spherisch exces laat uitdrukken, en de stelling $h + z = r + 2$ van Euler. Hierbij sluit zich aan, dat de moeilijkheid verbonden aan de inhoudsbepaling van het gedeelte eener bolruimte, dat door vier bolvormige driehoeken wordt begrensd, — d. i. van een viervlak in de niet-euclidische ruimte met drie afmetingen — zich afspiegelt in het homogeen zijn van de betrekking $h + z = r + l$ der vierdimensionale ruimte. Maar dan laat het zich voorzien, dat ook de inhoud van het bolvormig simplex der ruimte R_4 — dat we „plagiotoop" zullen noemen — weer uit te drukken zal zijn in plagiotopen van een geringer aantal dimensies, wijl de stelling van Euler in R_4 niet homogeen is. Welnu: in Schläfli's werk wordt algemeen aangegeven, hoe de inhoud van een plagiotoop met een oneven aantal afmetingen steeds kan worden uitgedrukt in de inhouden der begrenzende plagiotopen met een even aantal afmetingen; dus was hem deze later afzonderlijk gepubliceerde betrekking (vergelijk een korte verhandeling in Crelle, deel 67, blz. 183—199, 1866) reeds in 1852 bekend. Moge deze regels er toe bijdragen zijn werk in ons land de bekendheid te verschaffen, die het ten volle verdient.

De uitvoering van het werk is zeer goed; het bevat zeer weinig drukfouten. Een deel van de verdienste hiervan komt aan P. Stäckel toe, die mee de drukproeven las. S*.

Skew frequency curves in biology and statistics by J. C. Kapteyn. Published by the astronomical laboratory at Groningen. P. Noordhoff, publisher, Groningen, 1903, 8°, 45 blz., fl. 1,20, 2 sh.

Dit werkje geeft den inhoud weer van eenige lessen, door den schrijver in dit jaar op verzoek aan eenige botanische studenten gegeven, over de scheeve frequentiekrommen van Pearson. Hij tast daarin de door Pearson in deel 186 van de *Philosophical Transactions* gegeven theorie aan, 1°. wijl deze wel in staat stelt in zeer vele gevallen analytische krommen af te leiden, die zich nauw aansluiten bij de waargenomen frequentiekrommen, doch voor de discussie van biologische en statistische data weinig belooft, en 2°. wijl niet kan worden

toegegeven, dat de frequentiekrommen ontstaan op de door Pearson in navolging van Quételet aangegeven wijs. Daarom stelt de schrijver een nieuwe theorie op, die de volgende drie voordeelen heeft:

1°. Zij wijst het verband aan tusschen den vorm der krommen en de werkingen der oorzaken, waaraan deze is toe te schrijven.

2°. Zij veroorlooft de beschouwing der scheeve frequentiekrommen tot die der rechte terug te brengen.

3°. Zij is eenvoudig in de toepassing en maakt de bepaling der constanten van de kromme uit de waarnemingen nauwelijks moeilijker dan in het eenvoudige geval der normaalkrommen.

De schrijver wil, wat hij voor de theorie van Pearson in de plaats stelt, niet als iets beschouwd zien, waarmee het onderwerp uitgeput is. Veeleer roept hij wiskundigen van professie op, de theorie op een meer algemeene basis te stellen. Dan zal het geval van krommen voortgebracht onder den invloed van naar verschillende wetten werkende oorzaken onderzocht moeten worden.

De eerste tien paragrafen bevatten een populaire uiteenzetting van het ontstaan der frequentiekrommen; daarop volgt dan in vijf paragrafen de wiskundige behandeling, terwijl zeven paragrafen gewijd zijn aan uitvoerige voorschriften, die een voor de behoeften van botanici en statistici ingerichte gebruiksaanwijzing met verschillende voorbeelden behelzen. Eindelijk worden in de laatste twee paragrafen eenige algemeene besluiten getrokken.

Het eenige bezwaar, dat m. i. van wiskundige zijde tegen het werkje kan worden aangevoerd, betreft den titel. Van overoude tijden her toch wordt onder „skew curve" een scheluwe, d. i. een niet in een plat vlak gelegen kromme verstaan. Daarom ware „asymmetric frequency curves" te verkiezen geweest. Edoch, in deze minder gewenschte keuze zijn de Engelschen zelf den schrijver voorgegaan.

Het werkje is keurig uitgevoerd en van eenige tabellen en platen voorzien; een van deze platen bevat o.a. de afbeelding van een door den schrijver verzonnen en naar de aanwijzingen van J. W. Moll, hoogleeraar in plantkunde, in diens laboratorium vervaardigd apparaat, dat het ontstaan der scheeve frequentiekromme illusteert even als de bekende toestel van Galton dit het ontstaan der normaalkrommen doet. S'.

Geometria proiettiva ed analitica. Lezioni di Alfonso del Re. Generalità e Geometria di forme reali, ad una coordinata reale o complessa, con 244 esercizi e 135 figure intercalate nel testo. Een boekdeel, in 8°, 394 blz. Modena, libreria G. T. Vincenzi e Nipoti, 1902.

In 1888 verving de faculteit van wis- en natuurkunde der Universiteit te Rome voor de studenten van het eerste studiejaar op initiatief van Cremona het afzonderlijk onderwijs in projectieve meetkunde en in analytische meetkunde door het onderwijs in een enkel leervak: de projectieve *en* analytische meetkunde. Hiermede was del Re, thans hoogleeraar in beschrijvende meetkunde aan de Universiteit te Napels, van 1889 tot 1891 belast. Een gedeelte van dezen cursus vormt het materiaal van bovenstaand leerboek, dat, zoo als de toevoeging bij den titel aanduidt, op een algemeene inleiding de behandeling van de grondstelsels met een enkelvoudig aantal van elementen laat volgen. De inhoud komt dus vrijwel overeen met die van het eerste deel van Reye's „Geometrie der Lage", altijd met dit onderscheid, dat hier naast de meetkundige behandeling ook de stelkundige wordt gegeven, en de theorie der kegelsneden slechts zeer weinig tot ontwikkeling komt. Natuurlijk is de gelukkige combinatie van meet- en stelkundige beschouwing, zooals dit leerboek ze geeft, voor den leerling van veel belang; derhalve bevelen wij de lezing ervan gerust aan hen aan, voor wie het geen bezwaar is in de taal van Dante wiskunde te studeeren. S.

Fig. 4.

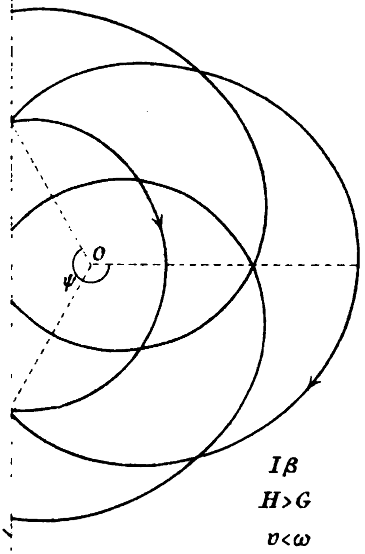
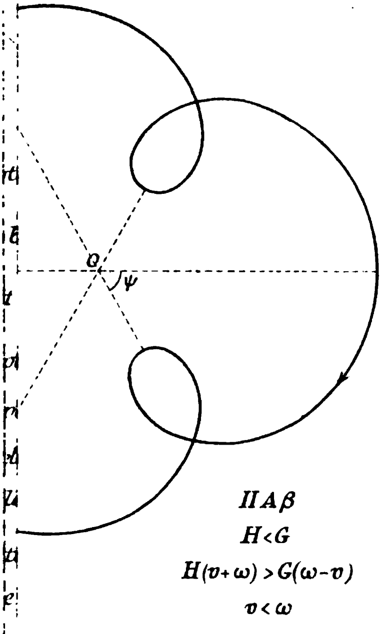


Fig. 6.



J. Bytel lith. P.J. Mulder impr. Leiden.

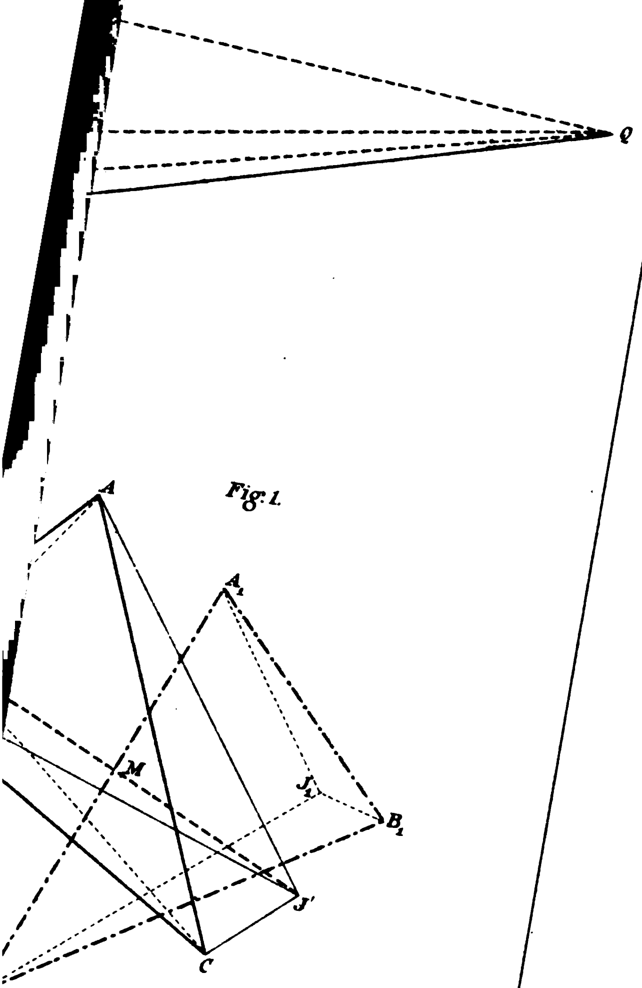


Fig: 1.

J. Bytel lith. P. J. Mulder impr. Leiden.

INHOUD.

Blz.

T 2 c. **C. KREDIET.** Sur un cas de propagation de vibrations sonores, infiniment petites . . . . 81.

M^1 5 k α. **F. SCHUH.** Over de meetkundige plaats der punten, van waar uit twee begrensde rechten onder gelijke hoeken gezien worden . . . . 92.

R 8 c γ, H 2 c γ. **J. H. M. FALKENHAGEN.** Die rollende Bewegung eines beliebigen schweren Umdrehungskörpers über eine horizontale Ebene. Auszug aus der Inaugural-dissertation . . . . 104.

R 7. **F. SCHUH.** Over de beweging van een materieel deeltje in een vlak eenparig roteerend krachtenveld . . . . 123.

R 1 e. **F. J. VAES.** Een vraagstuk betreffende stangenvierhoeken 177.

K 5 a, b. **H. A. W. SPECKMAN.** Over omgekeerd gelijkvormige driehoeken, perspectief gelegen. . . . . 179.

V 9. Erratum . . . . 188.

Bibliographie. . . . . 189.

M. D'OCAGNE. Exposé synthétique des principes fondamentaux de la Nomographie. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

H. DULAC. Recherches sur les points singuliers des équations différentielles. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

G. ROBIN. Œuvres scientifiques, réunies et publiées par Louis Raffy. Théorie nouvelle des fonctions exclusivement fondée sur l'idée de nombre. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

H. LAURENT. Sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres et de la géométrie. Recueil Scientia, no. 20. Paris, C. Naud, 1902.

L. DÉCOMBE. La compressibilité des gaz réels. Recueil Scientia, no 21, Paris, C. Naud, 1903.

J. W. GIBBS. Diagrammes et surfaces thermodynamiques. Traduction de M. G. Roy avec une introduction de M. B. Brunhes. Recueil Scientia, no. 22. Paris, C. Naud, 1903.

Annuaire pour l'an 1904, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars.

N. C. GROTENDORST. Beginselen der waarschijnlijkheidsrekening en van de theorie der fouten. Breda, de Kon. Mil. Academie, 1903.

E. JOUFFRET. Traité élémentaire de Géométrie à quatre dimensions et Introduction à la Géométrie de *n* dimensions. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

J. PERRIN. Traité de Chimie Physique. Tome I. Les principes. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

L. SCHLÄFLI. Theorie der vielfachen Kontinuität. Herausgegeben von J. H. Graf, Bern, 1903.

J. C. KAPTEYN. Skew frequency curves in biology and statistics. Groningen, P. Noordhoff, 1903.

A. DEL RE. Geometria proiettiva ed analitica. Modena, Vincenzi, 1902.

De redactie van het „Nieuw Archief" brengt den medewerkers in herinnering, dat met het oog op den betrekkelijk geringen omvang van het tijdschrift bijdragen van niet te groote uitgebreidheid de meest gewenschte zijn.

Alle stukken het „Nieuw Archief" betreffende gelieve men te richten aan den Secretaris der Redactie, Dr. **J. C. KLUYVER** te Leiden.

Boek-, Muziek- en Handelsdrukkerij van GEBR. HOITSEMA te Groningen.

NIEUW ARCHIEF

VOOR

WISKUNDE

UITGEGEVEN DOOR HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP
TE AMSTERDAM

ONDER REDACTIE VAN

J. C. KLUYVER, D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE

TWEEDE REEKS
DEEL VI
DERDE STUK

AMSTERDAM
DELSMAN EN NOLTHENIUS
1904

H 2 e γ

UEBER DAS VERHALTEN DER INTEGRALE EINER RICCATISCHEN GLEICHUNG IN DER NÄHE EINER SINGULÄREN STELLE,

von

J. H. M. FALKENHAGEN.
(Gorinchem.)

EINLEITUNG.

Beim Nachschlagen der Litteratur fand ich zwei Abhandlungen vor, worin zu einer gewissen Höhe die Untersuchung nach dem Verhalten der Integrale einer Riccatischen Differentialgleichung in der Nähe einer singulären Stelle durchgeführt worden ist. Die eine dieser Abhandlungen ist eine Arbeit des Herrn M. PETROVITCH, und erschien im Band 24 des *Bulletin de la Société Mathématique de France;* die andre hat Herr J. HORN im Band 118 des *Journals für die reine und angewandte Mathematik* publizirt.

Herr PETROVITCH hat sich aber in seiner oben zitierten Arbeit als erstes Ziel die Untersuchung der obengenannten Integrale in einem endlichen Intervalle gesteckt, und zwar hauptsächlich war es die Zahl der Null- und Unendlichkeitspunkte, und deren Verteilung, die ihn beschäftigte. Dabei musste er aber notwendig auf die Untersuchung der Integrale in der Nähe einer singulären Stelle geführt werden, und zwar musste er die Frage beantworten in welchen Fällen die Zahl der Unendlichkeitspunkte (bezw. der Nullpunkte) beim Annähern an eine singuläre Stelle unendlich gross werde. Die Antwort auf diese Frage kann aber auf einfacherem Wege gefunden werden als in der Abhandlung des Herrn PETROVITCH; auch die Antwort lässt sich übersichtlicher zusammenfassen.

In der zweiten Abhandlung, nämlich diejenige des Herrn HORN, wird in dem ersten Teile das Verhalten der obengenannten Integrale untersucht, wenn die singuläre Stelle im

Unendlichen liegt; und auch das complexe Gebiet wird in den Kreis der Betrachtungen hinein gezogen. Dabei werden zwei Methoden benutzt, deren eine mit derjenigen übereinstimmt, die ich angewandt hatte, um zu einer selbständigen Lösung des Problemes zu gelangen.

Nun fehlt aber in der Arbeit des Herrn Horn der Fall, worin die Integrale unendlich viele Male unendlich gross werden beim Annähern an die singuläre Stelle, und auch ein gewisser Grenzfall wird nicht eingehend betrachtet. [1])

Der Zweck dieser Arbeit ist es nun so viel wie möglich die Resultate zu ergänzen, bezw. zu vereinfachen, die ich in den obengenannten Abhandlungen vorfand.

FRAGESTELLUNG UND UNTERSCHEIDUNG DER ZWEI HAUPTFÄLLEN.

§ 1. Es sei gegeben eine Riccatische Gleichung

$$\frac{dy}{dx} = a + by + cy^2, \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

worin Eine oder Mehrere der Functionen a, b und c für einen gewissen Wert x_μ von x unendlich gross werden, und zwar in der Weise, dass man die Gleichung (1) in Folgende überbringen kann

$$\frac{dy}{dx} = (\alpha + \beta y + \gamma y^2)\, \mathrm{F}(x), \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

wobei denn $\mathrm{F}(x)$ unendlich gross wird für x_μ, während α, β und γ stetig bleiben und mindestens Eine dieser Functionen einen endlichen Wert erhält. [2])

Weiter wollen wir uns in jeder Hinsicht auf reelle Grössen

---

[1]) Siehe den in § 5, p. 215 behandelten Fall, und den in Abteilung d untersuchten Fall.

[2]) Wir setzen voraus, dass $\mathrm{F}(x)$ derweise unendlich gross wird für x_μ, dass sie in endlicher Nähe von x_μ stetig bleibt.

beschränken; also x bleibt reell, während y, α, β, γ und $F(x)$ reelle Functionen von x sind.

Wir stellen uns nun die Aufgabe die y-Functionen auf Grund obiger Voraussetzungen in der Nähe von x_μ zu untersuchen. Dabei haben wir gleich zwei Hauptfälle zu unterscheiden:

A: Das Integral $\int F(x)\,dx$ bleibt auch für x_μ stetig.

B: Das Integral $\int F(x)\,dx$ wird unendlich gross für x_μ.

A. Erster Hauptfall.

§ 2. In diesem Falle führen wir eine neue Variabele X ein, die in folgender Weise mit x zusammenhängt

$$X = \int_{x_0}^{x} F(x)\,dx \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

Hierin verstehen wir unter x_0 einen solchen Wert von x, dass in dem Intervalle (x_0, x_μ) die Function $F(x)$ stetig bleibt. (Siehe die zweite Note auf p. 210).

Hierdurch reducirt sich (2) auf

$$\frac{dy_X}{dX} = \alpha_X + \beta_X y_X + \gamma_X y^2_X, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

worin das Suffix X bedeutet, dass die betreffende Grösse als Function von X aufgefasst werden soll.

In Folge unserer Voraussetzungen hinsichtlich der Functionen α, β und γ, ist der mit x_μ correspondirende Wert von X jetzt keine singuläre Stelle mehr für die Gleichung (4), und können wir deshalb von den y_X-Functionen, und damit auch von den y-Functionen, Folgendes behaupten:

Es gibt immer eine und nur eine y-Function, welche für x_μ einen willkürlich zu wählenden Wert annimmt, (resp. unendlich gross wird.) [1]

---

[1]) In der Gleichung (4) nämlich ist das zweite Glied und auch der partielle Differentialquotient dieses zweiten Gliedes nach y_X stetig für den mit x_μ correspondirenden Wert von X und für einen willkürlichen (nicht unendlich grossen) Wert von y_X. Dann gibt es aber in Folge eines allgemeinen Satzes in der Theorie

Ausser den in dieser Weise erhaltenen y-Functionen gibt es keine andere. [2])

B. ZWEITER HAUPTFALL.

a. Unterscheidung der verschiedenen möglichen Fälle.

§ 3. Um in dem zweiten Hauptfall die y-Functionen in der Nähe von x_μ zu untersuchen, kehren wir zurück zur Gleichung (2), p. 210, und machen folgenden Unterschied:

---

der Differentialgleichungen eine und nur eine Function y_X, welche für X_μ einen willkürlich zu wählenden Wert annimmt. (Siehe Ph. Gilbert: Cours d'Analyse infinitésimale, partie élémentaire, 4me édition. Paris, Gauthier Villars, 1892 pp. 539—548.)

Wenn man nun auf die Gleichung für $\frac{1}{y_X}$ diesen Satz anwendet, so wird man ohne Mühe einsehen, dass es immer eine und nur eine Function y_X gibt, welche für X_μ unendlich gross wird.

Die Gleichung für $\frac{1}{y_X}$ ist nämlich folgende:

$$\frac{d\left(\frac{1}{y_X}\right)}{dX} = -\left\{\gamma_X + \beta_X\left(\frac{1}{y_X}\right) + \alpha_X\left(\frac{1}{y_X}\right)^2\right\}.$$

[2]) Dass es keine andre Functionen y_X gibt wie diejenigen, welche für den mit x_μ correspondirenden Wert von X einen willkürlich zu wählenden Wert annehmen, also stetig bleiben, resp. wie diejenige, welche für den genannten Wert von X unendlich gross wird; dass es also z. B. keine Function y_X gibt, welche sich für X_μ (den mit x_μ correspondirenden X-Wert) verhält wie $\sin\left(\frac{1}{X-X_\mu}\right)$, lässt sich folgendermassen nachweisen:

Bei einer willkürlichen Function y_X muss es entweder eine unendlich viele Elemente zählende Reihe von X-Werten geben, welche sich zu X_μ nähern, und für welche der absolute Wert der betreffenden Function y_X kleiner als eine gegebene Zahl bleibt;

oder es gibt eine solche Reihe nicht.

Im ersten Falle muss die Function y_X stetig sein für X_μ. (Siehe Ph. Gilbert: l. c. § 463, p. 545.)

Im zweiten Falle wird die Function y_X entweder in stetiger Weise für X_μ

1. Die Function γ hat für x_μ einen endlichen Wert.

2. Die Function γ wird für x_μ unendlich klein.
(Siehe hierbei die Bemerkungen zur Gleichung (2), p. 210).

Der zweite Fall lässt sich aber auf den ersten Fall zurückführen. Denn statt der Gleichung (2), p. 210, können wir Folgende ansetzen:

$$\frac{d\left(\frac{1}{y}\right)}{dx} = -\left\{\gamma + \beta\left(\frac{1}{y}\right) + \alpha\left(\frac{1}{y}\right)^2\right\} F(x). \quad . \quad . \quad (5)$$

Wenn nun α für x_μ endlich bleibt, so können wir offenbar, mutatis mutandis, die Resultate der Untersuchung des ersten Falles auf (5) anwenden, und so ein Urteil gewinnen über das Verhalten der y-Functionen selbst.

Ist aber auch $[\alpha]_{x_\mu} = 0$, dann machen wir in (5) noch folgende Substitution:

$$\frac{1}{y} = u + K, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

worin K eine willkürliche Constante ist.

Wir erhalten sodann

---

unendlich gross, oder sie wird unaufhörlich unendlich gross, indem x sich zu x_μ nähert, während sie auch im Ganzen jede gegebene Zahl überschreitet. (Sie verhält sich also wie z. B. $\left(\frac{1}{X-X_\mu}\right)$ sec. $\left(\frac{1}{X-X_\mu}\right)$.)

Dann wird aber die Function $\frac{1}{y_X}$ für X_μ unendlich klein, und ist diese Function in endlicher Nähe von x_μ stetig. Aber wir wissen, dass es nur eine Function $\frac{1}{y_X}$ gibt, welche für x_μ unendlich klein wird und in endlicher Nähe von x_μ stetig bleibt; d. h. es gibt nur eine Function y_X, welche für X_μ unendlich gross wird, und welche entweder in endlicher Nähe von X_μ stetig ist, oder sich verhält wie z. B. $\frac{1}{X-X_\mu}$ sec. $\left(\frac{1}{X-X_\mu}\right)$.

(Die letzte Art des Unendlichwerdens wird nur dann möglich sein, wenn γ_X unaufhörlich unendlich klein wird, indem sich X zu X_μ nähert; siehe obige Gleichung für $\frac{1}{y_X}$.)

$$\frac{du}{dx} = -\{(\gamma + \beta K + \alpha K^2) + (\beta + 2\alpha K)u + \alpha u^2\} F(x),$$

oder

$$\frac{d\left(\frac{1}{u}\right)}{dx} = \left\{\alpha + (\beta + 2\alpha K)\frac{1}{u} + (\gamma + \beta K + \alpha K^2)\left(\frac{1}{u}\right)^2\right\} F(x), \ldots (7)$$

wobei die Function y folgendermassen mit $\frac{1}{u}$ zusammenhängt:

$$y = \frac{\frac{1}{u}}{1 + K\frac{1}{u}} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

In der Gleichung (7) ist der mit γ von (2), p. 210, correspondirende Coefficient $\gamma + \beta K + \alpha K^2$ jedenfalls endlich für x_μ, denn, weil im dem jetzt betrachteten Falle $[\alpha]_{x_\mu}$ und $[\gamma]_{x_\mu}$ gleich Null sind, und weil mindestens Eine der Functionen α, β und γ nicht unendlich klein wird für x_μ, (siehe die Bemerkungen zur Gleichung (2), p. 210), muss auch $\alpha + \beta K + \gamma K^2$ für x_μ von Null verschieden sein, wenn wir die Constante K nicht gleich Null wählen.

Wir können deshalb auf die Gleichung (7) wiederum die Resultate der Untersuchung des ersten Falles anwenden, und dann mittelst Gleichung (8) leicht auf das Verhalten der y-Functionen selbst schliessen.

Die Untersuchung des zweiten Hauptfalles concentrirt sich also in derjenigen des ersten, auf p. 213, genannten Falles, nämlich $[\gamma]_{x_\mu} \neq 0$.

§ 4. Indem wir uns nun mit diesem Falle beschäftigen, ziehen wir zuerst die Functionen Y_1 und Y_2 in Betracht, welche folgender Gleichung genügen

$$\alpha + \beta Y + \gamma Y^2 \equiv 0. \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

Weil $[\gamma]_{x_\mu} \neq 0$, und weil α, β und γ stetig sind fur x_μ, (siehe die Bemerkungen zur Gleichung (2), p. 210), so müssen auch die Functionen Y_1 und Y_2 stetig sein für x_μ.

Es liegt nun auf der Hand zwischen folgenden drei Fällen zu unterscheiden:

1. $[Y_1]_{x_\mu}$ und $[Y_2]_{x_\mu}$ sind complex, (resp. imaginär);
2. $[Y_1]_{x_\mu}$ und $[Y_2]_{x_\mu}$ sind reell und von einander verschieden;
3. $[Y_1]_{x_\mu} = [Y_2]_{x_\mu}$, also auch reell [1]).

b. $[Y_1]_{x_\mu}$ und $[Y_2]_{x_\mu}$ complex, (resp. imaginär.)

§ 5. In diesem Falle ist es offenbar immer möglich einen Wert x_0 von x so zu wählen, dass in dem Intervalle (x_0, x_μ) die Functionen Y_1 und Y_2 complex bleiben, und $\gamma F(x)$ dasselbe Vorzeichen behält. (Man beachte hierbei, dass γ stetig ist für x_μ und von Null verschieden, während $F(x)$ unendlich gross wird für x_μ.)

In dem Intervalle (x_0, x_μ) hat also auch $\frac{dy}{dx}$ stets dasselbe Vorzeichen, und zwar dasselbe wie $\gamma F(x)$. (Siehe Gleichung (2), p. 210).

Machen wir nun die Voraussetzung, dass y stetig bleibt für x_μ, so können wir immer ein endliches Intervall (x_a, x_μ), x_a zwischen x_μ und x_0, angeben, worin y stetig bleibt. In diesem Intervalle haben wir dann folgende Gleichung:

$$y = [y]_{x_a} + \int_{x_a}^{x} (\alpha + \beta y + \gamma y^2) F(x)\, dx, \quad . \quad . \quad . \qquad (10)$$

(siehe (2) auf p. 210).]

Aber $\int F(x)\, dx$ ist in dem jetzt betrachteten zweiten Hauptfall unendlich gross für x_μ, während $[\gamma]_{x_\mu}$ jedenfalls von Null verschieden ist.

Also muss auch $\int_{x_a}^{x} (\alpha + \beta y + \gamma y^2) F(x)\, dx$ unendlich gross werden, wenn nicht

$$[\alpha + \beta y + \gamma y^2]_{x_\mu} = 0$$

1) Denn der Voraussetzung nach sind die Functionen α, β, γ, y und $F(x)$ reelle Functionen der reellen Veränderlichen x.

oder

$$[y]_{x_\mu} = [Y_1]_{x_\mu} \text{ oder } = [Y_2]_{x_\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Nun sind aber $[Y_1]_{x_\mu}$ und $[Y_2]_{x_\mu}$ complex, (resp. imaginär), während y für reelle Werte von x offenbar reell bleibt, wenn man den Anfangswert von y reell wählt. [1])

Also ist es unmöglich, dass y für x_μ stetig bleibt.

Auf der andren Seite ist es aber auch unmöglich, dass y für x_μ derweise unendlich gross wird, dass y in endlicher Nähe von x_μ überall stetig bleibt. Denn, wäre dies der Fall, so müsste $\frac{1}{y}$ für x_μ unendlich klein werden, und in endlicher Nähe von x_μ überall stetig bleiben. Dies ist aber unmöglich, denn auf derselben Weise wie oben lässt sich aus Gleichung (5), p. 213, schliessen, dass, wenn $\frac{1}{y}$ stetig bleiben soll für x_μ, $\left[\frac{1}{y}\right]_{x_\mu} = \left[\frac{1}{Y_1}\right]_{x_\mu}$ oder $= \left[\frac{1}{Y_2}\right]_{x_\mu}$ sein muss, während in dem jetzt betrachteten Falle $[Y_1]_{x_\mu}$ und $[Y_2]_{x_\mu}$ complex, (resp. imaginär), sind.

Wir haben schon oben bemerkt, dass $\frac{dy}{dx}$ in dem ganzen Intervalle dasselbe Vorzeichen behält, nämlich dasjenige von $\gamma F(x)$, während wir jetzt gezeigt haben, dass y für x_μ weder stetig bleiben kann, noch derweise unendlich gross werden, dass sie in endlicher Nähe von x_μ stetig bleibt.

Also muss y unendlich viele Male unendlich gross werden in endlicher Nähe von x_μ, d. h. x_μ muss eine Verdichtungsstelle von Unendlichkeitspunkten der y-Function sein. [2])

c. $[Y_1]_{x_\mu}$ und $[Y_2]_{x_\mu}$ reell und von einander verschieden.

§ 6. In diesem Falle lässt sich immer ein Wert x_0 von x

---

[1]) Siehe Note 1 auf p. 211.

[2]) Wird y für einen gewissen Wert x_1 (zwischen x_0 und x_μ) unendlich gross, so hat sie für grössere Wert von x (und in unmittelbarer Nähe von x_1) dasselbe Vorzeichen wie $-\gamma F(x)$, und für kleinere Werte dasjenige von $\gamma F(x)$. (Siehe die Gleichung (5), p. 213.)

so bestimmen, dass in dem Intervalle (x_0, x_μ) Folgendes zu bemerken ist:

1. Die Functionen Y_1 und Y_2 bleiben im ganzen Intervalle (x_0, x_μ) reell und von einander verschieden, und der kleinste Wert in (x_0, x_μ) der einen Function ist grösser als der grösste Wert in (x_0, x_μ) der andren Function.

Wir verabreden hier die Function, deren kleinster Wert grösser ist als der grösste der andren, Y_1 zu nennen. Weiter wollen wir diesen kleinsten Wert mit m_1 bezeichnen, und den grössten mit M_2.

2. Die Function γ F (x) behält in (x_0, x_μ) dasselbe Vorzeichen. (Wir wollen bei den jetzt folgenden Betrachtungen voraussetzen, dass γ F (x) positiv sei in (x_0, x_μ).)

Schliesslich nehmen wir $x_0 < x_\mu$; also untersuchen wir das Verhalten der y-Functionen, indem x wächst von x_0 bis x_μ. [1])

§ 7. Indem wir jetzt zur Untersuchung der y-Functionen in dem so eben beschriebenen Intervall (x_0, x_μ) übergehen, bemerken wir an erster Stelle, dass, wenn y für x_μ stetig bleiben soll, $[y]_{x_\mu}$ gleich $[Y_1]_{x_\mu}$ oder $[Y_2]_{x_\mu}$ sein muss, und dass es unmöglich ist, dass y für x_μ derweise unendlich gross wird, dass y in endlicher Nähe von x_μ überall stetig bleibt.

Dies lässt sich geradeso beweisen, wie in § 5, p. 215, bei der Betrachtung des vorigen Falles b, nämlich $[Y_1]_{x_\mu}$ und $[Y_2]_{x_\mu}$ complex, resp. imaginär.

Weil nun aber $[Y_1]_{x_\mu}$ und $[Y_2]_{x_\mu}$ in dem jetzt betrachteten Falle reell sind, so bleibt die Möglichkeit offen, dass y für x_μ stetig bleibt. Dann aber gilt folgende Gleichung

$$[y]_{x_\mu} = [Y_1]_{x_\mu} \text{ oder} = [Y_2]_{x_\mu} \quad \ldots \quad (12)$$

§ 8. Wir haben also jetzt zu untersuchen, wie es sich mit der Stetigkeit (resp. Unstetigkeit) der y-Functionen für x_μ verhält. Wir wissen schon, dass es unmöglich ist, dass y, in endlicher Nähe von x_μ überall stetig bleibend, für x_μ unendlich gross wird. Es ist aber durch die vorigen Betrachtungen

---

[1]) Natürlich wählen wir x_0 auch so, dass in (x_0, x_μ) die Functionen α, β, γ und F (x) fortwährend stetig bleiben, also auch die Functionen Y_1 und Y_2. (Siehe die Bemerkungen zu Gleichung (2) in § 1, p. 210, und auch § 4, p. 214.)

die Möglichkeit noch nicht ausgeschlossen, dass y eine Unstetigkeit andrer Art für x_μ erleidet.

Indem wir nun in dieser Richtung die Untersuchung weiter führen, beweisen wir folgende Sätze:

a. Ist x_1 ein Wert von x, zu (x_0, x_μ) gehörend, so gibt es immer eine und nur eine y-Function, welche für x_1 einen willkürlich zu wählenden Wert annimmt.

Dieser Satz ist eine Folge der Stetigkeit der Functionen α, β, γ und F (x) in dem Intervalle (x_0, x_μ).[1]

b. Für den oben genannten Wert x_1 gibt es immer eine und nur eine y-Function, welche für diesen Wert unendlich gross wird, und zwar in der Weise, dass sie für $x_1 - 0 > 0$, für $x_1 + 0 < 0$ ist.[2]

Dieser Satz ist eine Folge des Satzes *a*, wenn man diesen anwendet auf die Gleichung (5), *p.* 213, und wenn man beachtet, dass γ F (x) positiv ist in (x_0, x_μ).

c. Ausser den in den Sätzen a und b beschriebenen y-Functionen gibt es für x_1 und in dessen Nähe keine andere.[3]

d. Ist $[y]_{x_0} < m_1$ (der kleinste Wert von Y_1 in (x_0, x_μ)), dann bleibt die zugehörige y-Function zwischen x_0 und x_μ immer stetig und kleiner als m_1. Auch für den singulären Wert x_μ ist sie kleiner als m_1.

Die Function y-Y_1 bleibt also stetig in (x_0, x_μ) und wird weder zwischen x_0 und x_μ, noch für x_μ, unendlich klein.

Beweis: Weil die Functionen Y_1 und Y_2 der Gleichung (9), p. 214, genügen, so können wir (2) auf p. 210, folgendermassen ansetzen:

$$\frac{dy}{dx} = (y - Y_1)\ (y - Y_2)\ \gamma\ F\ (x)\ dx \quad . \quad . \quad . \quad (13).$$

Hinsichtlich der mit $[y]_{x_0}$ $(< m_1)$ correspondirenden y-Function können wir nun in Folge des Satzes *c* folgende zwei Voraussetzungen machen:

Erstens: y bleibt stetig zwischen x_0 und x_μ.

---

[1]) Siehe Note 1 auf p. 211.

[2]) Siehe Note 2 auf p, 216; unter $x_1 - 0$ verstehen wir die Werte von x in unmittelbarer Nähe von x_1 und kleiner als x_1; unter $x_1 + 0$ also diejenigen in unmittelbarer Nähe von x_1 und grösser als x_1.

[3]) Siehe Note 2 auf p. 212.

Zweitens: y wird unendlich gross zwischen x_0 und x_μ.

Im ersten Fall kann y weder zwischen x_0 und x_μ, noch für x_μ, $\geqq m_1$ werden, denn anderenfalls würde es zwischen x_0 und x_μ Teilintervalle geben, worin y grösser bliebe als M_2 (der grösste Wert in (x_0, x_μ) von Y_2) und kleiner als m_1, während ihr Differentialquotient positiv bliebe. Dies ist aber nicht in Einklang mit (13), welcher Gleichung y doch immer genügen muss, und woraus man sofort ersehen kann, dass $\frac{dy}{dx}$ eben negativ bleiben müsste in obengenannten Intervallen. (Man ziehe hierbei in Betracht, dass $\gamma F(x)$ positiv ist in (x_0, x_μ), und dass $m_1 > M_2$ ist; siehe die Umschreibungen des Intervalles (x_0, x_μ) in § 6, p. 216.)

Also: Bleibt y stetig in (x_0, x_μ), dann ist y immer kleiner als m_1, auch für x_μ.

Beschäftigen wir uns mit der zweiten Voraussetzung, nämlich, dass y unendlich gross wird zwischen x_0 und x_μ, während $[y]_{x_0} < m_1$ ist.

Nun lässt sich aber wieder gerade wie oben die Unzulässigkeit dieser Voraussetzung beweisen, wenn man auch noch den Satz *b* in Betracht zieht. (Man betrachte hierbei das Intervall (x_0, x_1), wenn x_1 der Wert von x ist, für welchen y zum ersten Male unendlich gross wird, indem man x zunehmen lässt von x_0 bis x_μ.)

Hiermit ist also obiger Satz *d* bewiesen.

e. Es gibt einen Grenzwert $[y_e]_{x_0}$, nicht kleiner als m_1, der dadurch definiert ist, dass, wenn man $[y]_{x_0} > [y_e]_{x_0}$ wählt, die zugehörige y-Function unendlich gross wird zwischen x_0 und x_μ, und zwar nur einmal.

Umgekehrt hat jede y-Function, welche zwischen x_0 und x_μ unendlich gross wird, für x_0 einen Wert, der grösser als $[y_e]_{x_0}$ ist.

Beweis: Betrachten wir erstens eine y-Function, die für einen gewissen Wert x_1 von x, zwischen x_0 und x_μ unendlich gross wird. (Siehe Satz *b*, p. 218). Diese Function ist positiv für $x_1 - 0$, negativ für $x_1 + 0$. Im dem Intervalle (x_0, x_1) muss sie stetig bleiben und ist sie niemals, auch nicht für x_0, kleiner als m_1. Denn würde sie zwischen x_0 und x_1 unendlich gross, oder kleiner als m_1, z. B. für x_2, dann würde

sie in Folge des Satzes b, resp. in Folge der Bedeutung von m_1, für x_2+0 kleiner sein als der kleinste Wert von Y_1 in (x_2, x_μ); also müsste sie in Folge des Satzes d, den wir natürlich auch auf (x_2, x_μ) anwenden können, im ganzen Intervalle (x_2, x_μ) stetig bleiben, während wir wissen, dass sie zwischen x_2 und x_μ, nämlich für x_1, unendlich gross wird. Die Voraussetzung also, dass sie zwischen x_1 und x_0 unendlich gross oder kleiner als m_1 wird, ist unzulässig.

Weiter muss die jetzt betrachtete y-Function stetig bleiben in (x_1, x_μ), und niemals, auch nicht für x_μ, grösser werden als der kleinste Wert von Y_1 in (x_1, x_μ). Dies rührt daher, dass diese y-Function für x_1+0 negativ ist, während sie für x_1 unendlich gross ist; also muss sie für x_1+0 gewiss kleiner sein als der kleinste Wert von Y_1 in (x_1, x_μ). Dann können wir aber den Satz d anwenden, woraus sofort erhellt, dass die jetzt betrachtete y-Function in (x_1, x_μ) stetig bleiben muss und nicht grösser als der kleinste Wert von Y_1 in (x_1, x_μ) werden kann.

Nach diesen Bemerkungen hinsichtlich einer y-Function, die für einen gewissen Wert x_1 von x, zwischen x_0 und x_μ, unendlich gross wird, ist es nicht schwierig zu beweisen, dass eine y-Function, welche unendlich gross wird für einen Wert von x, der grösser, resp. kleiner, als x_1 ist, für x_0 einen kleinern resp. grössern, Wert annehmen muss, als diejenige y-Function, welche für x_1 unendlich gross wird. Denn anderenfalls würden die jetzt betrachteten y-Functionen notwendig einander gleich zwischen x_0 und x_μ, was auf Grund des Satzes a, p. 218, unmöglich ist.

Umgekehrt wird man nun ohne Mühe beweisen, dass man nur y-Functionen, welche zwischen x_1 und x_0 unendlich gross werden, erhält, indem man $[y]_{x_0}$ stetig zunehmen lässt von $[y_1]_{x_0}$ bis $+\infty$. (y_1 ist die y-Function, die für x_1 unendlich gross wird.)

Ebenso ist es klar, dass man nur y-Functionen, welche zwischen x_1 und x_μ unendlich gross werden, erhält mittelst stetiger Abnahme von $[y]_{x_0}$ von $[y_1]_{x_0}$ an. Dann muss $[y]_{x_0}$ sich aber einem gewissen Grenzwert nähern, welchen wir mit $[y_e]_{x_0}$ bezeichnen wollen. Denn damit zu $[y]_{x_0}$ eine y-Function gehöre, welche zwischen x_0 und x_μ unendlich gross wird, muss $[y]_{x_0}$ gewiss nicht kleiner als m_1 sein. (Siehe den Satz d, p. 218).

Hiermit ist obiger Satz e vollständig bewiesen.

f. Ist $[y_e]_{x_0} \geqq [y]_{x_0} \geqq m_1$, *so wird die zugehörige y-Function stetig bleiben zwischen* x_0 *und* x_μ. (Siehe die Sätze d und e.)

Weiter lassen sich noch folgende Bemerkungen anstellen, hinsichtlich dieser y-Functionen, wobei $[y_e]_{x_0} \geqq [y]_{x_0} \geqq m_1$ ist.

Erstens: Der Wert, den die mit $[y_e]_{x_0}$ *correspondirende y-Function* y_e *annimmt für* x_1 $(x_0 < x_1 < x_\mu)$, *steht zum Intervalle* (x_1, x_μ) *in demselben Verhältniss, wie* $[y_e]_{x_0}$ *zu* (x_0, x_μ). *(Siehe Satz e, p. 219). Also wird* y_e *in* (x_1, x_μ) *gewiss nicht kleiner als der kleinste Wert von* Y_1 *in* (x_1, x_μ).

Zweitens: Bei diesen y-Functionen ist es gewiss möglich, dass $y - Y_1$ *zwischen* x_0 *und* x_μ *unendlich klein wird. Wird aber bei einer solchen y-Function* $y - Y_2$ *unendlich klein zwischen* x_0 *und* x_μ, *so kann* $y - Y_1$ *zwischen* x_μ *und dem Wert von* x, *für welchen* $y - Y_2$ *zum ersten Male unendlich klein wird, indem man* x *von* x_0 *bis* x_μ *zunehmen lässt, nicht mehr unendlich klein werden.*

Um die erste Bemerkung zu beweisen, ziehen wir in Betracht, dass, wenn $[y]_{x_1} > [y_e]_{x_1}$ ist, die zugehörige y-Function zwischen x_1 und x_0, und auch für x_0, stetig und grösser als y_e bleiben muss. Denn damit sie kleiner als y_e oder unendlich gross werde in dem Intervalle (x_0, x_1), müsste sie, in Folge der Voraussetzung $[y]_{x_1} > [y_e]_{x_1}$ und der vorigen Sätze, gleich y_e werden für irgend einen Wert von x zwischen x_0 und x_1. Dies ist aber auf Grund des Satzes a, p. 218, unmöglich. Sie muss also zwischen x_1 und x_0, und auch für x_0, stetig bleiben und grösser als y_e, also unendlich gross werden zwischen x_1 und x_μ, auf Grund des Satzes e, p. 219.

Ist dahingegen $[y]_{x_1} < [y_e]_{x_0}$, so muss die zugehörige y-Function zwischen x_1 und x_μ stetig bleiben, denn eine andere Annahme würde, wie sich leicht beweisen lässt, dem Satze a widersprechen. (Siehe die Sätze b und c, und beachte, dass in Folge des Satzes f y_e stetig bleibt zwischen x_0 und x_μ, also auch zwischen x_1 und x_μ).

Um die zweite Bemerkung zu beweisen, ziehen wir in Betracht, dass der kleinste Wert von Y_1 in (x_0, x_μ), welchen Wert wir immer mit m_1 bezeichnet haben, grösser ist als der grösste Wert von Y_2 in demselben Intervalle (x_0, x_μ), (siehe die erste Bemerkung in § 6. p. 217), und wenden dann den Satz d an auf das Intervall zwischen x_μ und dem Wert von x,

für welchen der obigen Voraussetzung nach die Function $y - Y_2$ zum ersten Male unendlich klein wird, indem man x von x_0 bis x_μ zunehmen lässt.

§ 9. Aus den Sätzen d, e und f, und zumal aus der zweiten Bemerkung zu f lässt sich sogleich folgern, *dass sich für jede y-Function Wert x_a ($x_0 \leqq x_a < x_\mu$) in der Weise bestimmen lässt, dass die Functionen y, $y - Y_1$ und $y - Y_2$ stetig bleiben in (x_a, x_μ) und wenigstens Eine der beiden letzten Functionen in diesem Intervalle nicht mehr unendlich klein wird.*

Mittelst der Gleichung (13), p. 218,

$$\frac{dy}{dx} = (y - Y_1)(y - Y_2)\,\gamma\,F(x),$$

können wir nun weiter Folgendes aus dem Vorhergehenden herleiten:

g. Lässt man x zu x_μ zunehmen, so kann bei jeder y-Function ein Wert von x solchermassen bestimmt werden, dass die betreffende y-Function zwischen diesem Wert und x_μ stetig bleibt, während sie für x_μ entweder einen endlichen (resp. unendlich kleinen) Wert annimmt, oder unendlich gross wird. Andre Möglichkeiten gibt es nicht.

Beweis: Ziehen wir dasjenige in Betracht, was wir im Anfange dieses Paragraphen bemerkt haben, so haben wir nur zu zeigen, dass y für x_μ selbst entweder einen endlichen (resp. unendlich kleinen) Wert hat, oder unendlich gross wird.

Betrachten wir nun zuerst diejenige y Functionen, bei welchen $y - Y_1$ nicht mehr unendlich klein wird in (x_a, x_μ), also, weil $y - Y_1$ stetig bleibt in (x_a, x_μ), (siehe den Anfang dieses Paragraphen), ihr Vorzeichen nicht ändert in (x_a, x_μ). Bei diesen y-Functionen gibt es nun hinsichtlich $y - Y_2$ folgende zwei Möglichkeiten:

Erstens: Es kann ein Wert x_b ($x_a \leqq x_b < x_\mu$) derweise bestimmt werden, dass $y - Y_2$ nicht mehr unendlich klein wird in dem Intervalle (x_b, x_μ), also auch ihr Vorzeichen nicht ändert in (x_b, x_μ), weil $y - Y_2$ stetig bleibt in (x_a, x_μ), also auch in (x_b, x_μ).

Zweitens: Einen solchen Wert von x gibt es nicht.

Im ersten Falle ändern die Functionen $y - Y_1$, $y - Y_2$ und

$\gamma\,F(x)$ im Intervalle (x_ι, x_μ) ihr Vorzeichen nicht. ($\gamma\,F(x)$ ist der Voraussotzung nach positiv in (r_0, x_μ), also auch in (x_ι, x_μ); siehe die zweite Bemerkung in § 6, p. 217). Mittelst Gleichung (13), p 218, lässt sich hieraus sofort schliessen, dass $\frac{dy}{dx}$ in (x_ι, x_μ) dasselbe Vorzeichen behalten muss, dass also y entweder zu einem Grenzwert sich nähern oder unendlich gross werden muss, indem man x bis x_μ zunehmen lässt. (Man beachte hierbei, dass y in (x_α, x_μ), also auch in (x_ι, x_μ) stetig bleibt; siehe den Anfang dieses Paragraphen.)

Im zweiten Falle wird $y - Y_2$ unaufhörlich unendlich klein, wenn x sich zu x_μ nähert. Ziehen wir nun in Betracht, dass auf der andren Seite $y - Y_1$ und $\gamma\,F(x)$ in dem im Anfange dieses Paragraphen umschriebenen Intervalle (x_α, x_μ) stetig bleiben und ihr Vorzeichen nicht ändern, dann erhellt aus (13), p. 218, dass $\frac{dy}{dx}$ zwischen zwei auf einander folgenden und zu (x_α, x_μ) gehörenden Werten von x, für welche $y - Y_2$ unendlich klein wird, dasselbe Vorzeichen behalten muss. Deshalb lassen sich folgende Ungleichungen hinschreiben, indem wir die gerade umschriebenen Werte von x x_1 und x_2 nennen:

$$|y - [Y_2]_{x_1}| < |[Y_2]_{x_1} - [Y_2]_{x_2}|; \quad |y - [Y_2]_{x_2}| < |[Y_2]_{x_1} - [Y]_{x_2}|$$

Diese Ungleichungen gelten für das Intervall (x_1, x_2); das Zeichen | | bedeutet, dass nur der absolute Wert der betreffenden Grösse in Betracht gezogen wird.

Weil Y_2 stetig ist für x_μ, und weil x_μ eine Verdichtungsstelle der mit x_1 und x_2 bezeichneten Werte von x ist, so schliessen wir aus den obigen Ungleichungen, dass auch y für x_μ stetig bleibt, und gleich $[Y_2]_{x_\mu}$ wird. (Man ziehe hierbei in Betracht, dass $y - Y_2$ unaufhörlich unendlich klein wird, wenn x sich zu x_μ nähert, und dass x_1 und x_2 zwei auf einander folgende Nullstellen von $y - Y_2$ sind.)

Wenn wir nun eine y-Function betrachten, bei welcher $y - Y_2$ dasselbe Vorzeichen behält in (x_α, x_μ), (siehe den Anfang dieses Paragraphen, p. 222), so werden wir mit dem Vorigen übereinstimmende Resultate erhalten, nur müssen wir Y_1 umwandeln in Y_2, und umgekehrt.

Hiermit ist also der Satz g vollständig bewiesen.

§ 10. Kehren wir jetzt zurück zu den in § 7, p. 217, erhaltenen Resultaten. In diesem Paragraphen haben wir nämlich gezeigt, dass wenn y stetig bleiben soll für x_μ, $[y]_{x_\mu}$ gleich $[Y_1]_{x_\mu}$ oder gleich $[Y_2]_{x_\mu}$ sein muss, und dass y niemals für x_μ derweise unendlich gross werden kann, dass sie in endlicher Nähe von x_μ überall stetig bleibt. In Folge des Satzes g können wir nun diese Aussagen schärfer fassen, und zwar folgendermassen:

h. Die y-Functionen sind stetig für x_μ, und zwar so, dass folgende Gleichung gilt

$$[y]_{x_\mu} = [Y_1]_{x_\mu} \text{ oder } = [Y_2]_{x_\mu}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

§ 11. Wir haben aber jetzt noch zu untersuchen, welche y-Functionen für x_μ den Wert $[Y_1]_{x_\mu}$ annehmen, und welche den Wert $[Y_2]_{x_\mu}$ erhalten. Um diese Frage zu beantworten kehren wir zurück zu den im Paragraphen 8, p. 217, bewiesenen Sätzen d, e, u. s. w., und beachten den Satz h am Schluss des vorigen Paragraphen. Wenn wir dann noch schliesslich in Betracht ziehen, dass M_2, der grösste Wert von Y_2 in (x_0, x_μ), kleiner ist als der m_1, der kleinste Wert von Y_1 in (x_0, x_μ), (siehe die erste Bemerkung in § 6, p. 217), so erhalten wir folgende Sätze:

i. Ist $[y]_{x_0} < m_1$, oder $> [y_e]_{x_0}$, so nimmt die betreffende y-Function für x_μ den Wert $[Y_2]_{x_\mu}$ an.[1])

j. Die Function y_e ist für x_1 $(x_0 \leqq x_1 < x_\mu)$ nicht kleiner als der kleinste Wert vun Y_1 in (x_1, x_μ), und nicht grösser als der grösste Wert von Y_1 in (x_1, x_μ), muss also für x_μ den Wert $[Y_1]_{x_\mu}$ annehmen.

Dass y_e für x_1 $(x_0 \leqq x_1 < x_\mu)$ nicht kleiner als der kleinste Wert von Y_1 in (x_1, x_μ) wird, sagt die schon bewiesene erste Bemerkung zum Satze f, p. 221.

Dass $[y_e]_{x_1}$ aber auch nicht grösser sein kann als der grösste Wert von Y_1 in (x_1, x_μ), wird folgendermassen bewiesen:

---

[1]) Man beachte hierbei die während des Beweises des Satzes e gemachte Bemerkung, dass y, wenn sie für x_1 $(x_0 \leqq x_1 < x_\mu)$ unendlich gross wird, im ganzen Intervalle $(x_1\ x_\mu)$ kleiner bleiben muss als der kleinste Wert van Y_1 in (x_1, x_μ).

Würde $[y_e]_{x_1}$ grösser als der obengenannte grösste Wert, so müsste es jedenfalls zwischen x_1 und x_μ Intervalle geben, worin sie fortwährend grösser bliebe als dieser grösste Wert, worin aber ihr Differentialquotient fortwährend negativ bliebe. Denn der Gleichung (14), p. 224, zufolge muss y_e für x_μ entweder den Wert $[Y_1]_{x_\mu}$, oder den Wert $[Y_2]_{x_\mu}$ erhalten, und beide Werte sind gewiss kleiner als $[y_e]_{x_1}$, wenn $[y_e]_{x_1}$ wirklich einen Wert hat, der grösser ist als der grösste Wert von Y_1 in (x_1, x_μ). (Man beachte wiederum, dass $[Y_1]_{x_\mu} > [Y_2]_{x_\mu}$, und dass y_e stetig ist im ganzen Intervalle (x_0, x_μ), also auch in (x_1, x_μ); siehe den Satz f, p. 221).

Nun sagt aber die Gleichung (13), p. 218, dass in den gerade beschriebenen Intervallen zwischen x_1 und x_μ, worin nämlich y_e fortwährend grösser bleibt als der grösste Wert von Y_1 in (x_1, x_μ), der Differentialquotient von y_e eben positiv sein muss. Denn $\gamma F(x)$ ist positiv in (x_0, x_μ), also auch in (x_1, x_μ), und der grösste Wert von Y_2 in (x_0, x_μ) ist kleiner als der kleinste Wert von Y_1 in demselben Intervall. (Siehe die erste und zweite Bemerkung in § 6, p. 217).

Die Voraussetzung also, dass $[y_e]_{x_1}$ $(x_0 \leqq x_1 < x_\mu)$ grösser sei als der grösste Wert von Y_1 in (x_1, x_μ), ist nicht in Einklang mit der Gleichung (13), p. 218, welcher y_e doch immer genügen muss; deshalb ist $[y_e]_{x_1}$ gewiss nicht grösser als der soeben genannte grösste Wert, und hiermit ist obiger Satz j bewiesen. Nun kann aber gezeigt werden, *dass es ausser der Function y_e keine andre y-Functionen gibt*, *welche für x_μ den Wert $[Y_1]_{x_\mu}$ annehmen.*

Zum Beweise dieses letzten Satzes substituiren wir $(y - y_e) + y_e$ für y in (2), p. 210, und erhalten dann folgende Gleichung für $(y - y_e)$:

$$\frac{d(y-y_e)}{dx} = \{(\beta + 2\gamma y_e)(y-y_e) + \gamma(y-y_e)^2\} F(x) \ldots (15)$$

(Man beachte hierbei, dass y_e der Gleichung (2) genügt.)

Beachten wir, dass β, γ und y_e stetig sind für x_μ, dass weiter die mit γ und $F(x)$ von (2) auf p. 210 correspondirenden Functionen in (15) wiederum die Functionen γ und $F(x)$ sind, und schliesslich, dass die mit Y_1 und Y_2 von (2) übereinstimmenden Functionen hier respective für x_μ die Werte Null und

$[Y_2 - Y_1]_{x_\mu}$ annehmen, so schliessen wir, dass wir auch bei (15) einen Wert x_0 von x derweise bestimmen können, dass im Intervalle (x_0, x_μ) hinsichtlich der mit Y_1 und Y_2, etc. correspondirenden Functionen dieselben Bemerkungen zu machen sind, wie wir sie in § 6, p. 217, angestellt haben.[1] Dabei muss natürlich wiederum $x_0 < x_\mu$ sein. Auf diesen Bemerkungen ausschliesslich beruhen aber die im Vorhergehenden erhaltenen Sätze. Diese Sätze können wir also, mutatis mutandis natürlich, auch auf die Functionen $(y - y_e)$ anwenden.

Nun wird in Folge der Sätze i und j, p. 224, die Function $(y - y_e)$ für x_μ den mit $[Y_2]_{x_\mu}$ correspondirenden Wert $[Y_2 - Y_1]_{x_\mu}$ annehmen, wenn $[y - y_e]_{x_1}$ $(x_0 \leqq x_1 < x_\mu)$ grösser gewählt wird als der grösste Wert in (x_1, x_μ) der mit Y_1 übereinstimmenden Function, oder kleiner als der kleinste Wert in (x_1, x_μ) derselben Function.

Nun ist aber die mit Y_1 übereinstimmende Function identisch gleich Null, während die Function y_e für x_μ gleich $[Y_1]_{x_\mu}$ wird. (Siehe den Satz j.)

Also:

Wählt man $[y]_{x_1}$ von $[y_e]_{x_1}$ verschieden, so muss die zugehörige y-Function für x_μ den Wert $[Y_2]_{x_\mu}$ annehmen. Und dies ist nichts Andres als obiger Satz, nämlich, dass y_e die einzige y-Function ist, welche für x_μ den Wert $[Y_1]_{x_\mu}$ erhält.

§ 11. Bei den Betrachtungen in den auf § 6 folgenden

---

[1] Die mit Y_1 und Y_2 corespondirenden Functionen genügen der Gleichung

$$(\beta + 2\gamma y_e) u + \gamma u^2 \equiv 0 \text{ (Siehe Gleichung (15), p 225).}$$

Also ist die Eine dieser Functionen identisch gleich Null, während die Andre für x_μ gleich $-\left[\frac{\beta}{\gamma} + 2y_e\right]_{x_\mu}$ wird, d. h. gleich $[Y_2 - Y_1]_{x_\mu}$; denn in Folge der Bedeutung von Y_1 und Y_2 ist $-\frac{\beta}{\gamma} = Y_1 + Y_2$, (Siehe § 4, p. 214), und weiter wissen wir, dass $[y_e]_{x_\mu} = [Y_1]_{x_\mu}$ ist. Weil nun $[Y_2]_{x_\mu} < [Y_1]_{x_\mu}$ ist, so hat die Function, welche für x_μ gleich $[Y_2 - Y_1]_{x_\mu}$ wird, für x_μ einen negativen Wert, also einen kleineren Wert als die Function, welche identisch gleich Null ist. Die letzte Function correspondirt also in Folge unserer in § 6, p. 217, gemachten Verabredung mit Y_1.

Paragraphen haben wir vorausgesetzt, dass $\gamma F(x)$ in der Nähe von x_μ positiv und dass x_0 kleiner als x_μ sei.

Bevor wir zur Betrachtung der Fälle übergehen, worin $\gamma F(x)$ negativ ist in der Nähe von x_μ, oder worin $x_0 > x_\mu$ ist, wollen wir erst die Resultate der vorhergehenden Untersuchung zusammenfassen.

Wir erhalten dann Folgendes:

k. Wenn gegeben ist die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = (\alpha + \beta y + \gamma y^2) F(x),$$

und wenn folgende fünf Bedingungen erfüllt sind, nämlich dass:

1. $F(x)$ unendlich gross wird für x_μ;
2. $\int F(x)\,dx$ unendlich gross wird für x_μ;
3. α, β und γ stetig sind für x_μ, während $[\gamma]_{x_\mu} \neq 0$ ist;
4. die der Gleichung: $\alpha + \beta Y + \gamma Y^2 = 0$ genügenden Functionen Y_1 und Y_2 für x_μ reelle, von einander verschiedene, Werte haben; $([Y_1]_{x_\mu} > [Y_2]_{x_\mu})$;
5. $\gamma F(x)$ positiv ist für $x_\mu - 0$;

so gibt es immer eine und nur eine y-Function, welche bei wachsendem x für x_μ den grössten der Werte $[Y_1]_{x_\mu}$ und $[Y_2]_{x_\mu}$, also den Wert $[Y_1]_{x_\mu}$ annimmt; alle die andren y-Functionen werden bei wachsendem x für x_μ gleich dem kleinsten Wert $[Y_2]_{x_\mu}$.

Nehmen wir jetzt an, dass die ersten vier Bedingungen erfüllt sind, dass aber $\gamma F(x)$ negativ ist für $x_\mu - 0$.

Dieser Fall wird offenbar mittelst der Substitution $-Y$ für y auf den vorhergehenden zurückgeführt, und dann wird man ohne Mühe einsehen, *dass es jetzt immer eine und nur eine y-Function gibt, welche bei wachsendem x für x_μ den kleinsten der Werte $[Y_1]_{x_\mu}$ und $[Y_2]_{x_\mu}$, also den Wert $[Y_2]_{x_\mu}$ erhält; dass aber alle die andren y-Functionen den grössten Wert $[Y_1]_{x_\mu}$ annehmen.*

Indem wir nun weiter das Verhalten der y-Functionen bei abnehmendem x untersuchen, wobei wir voraussetzen, dass wiederum die ersten vier Bedingungen erfüllt sind, während

$\gamma F(x)$ entweder positiv, oder negativ ist für $x_\mu + 0$, so bemerken wir, dass wir diese zwei Fälle mittelst der Substitution $-X$ für x respective auf den zweiten und den ersten vorhergehenden Fall zurückführen können. Dann wird man ohne Mühe einsehen, *dass es, wenn* $\gamma F(x) > 0$ *ist für* $x_\mu + 0$, *resp. wenn* $\gamma F(x) < 0$ *ist für* $x_\mu + 0$, *immer eine und nur eine y-Function gibt, welche bei abnehmendem x für* x_μ *den kleinsten Wert* $[Y_2]_{x_\mu}$, *resp. den grössten Wert* $[Y_1]_{x_\mu}$, *erhält, während alle die andren y-Functionen für* x_μ *gleich dem grössten Wert* $[Y_1]_{x_\mu}$, *resp. gleich dem kleinsten Wert* $[Y_2]_{x_\mu}$, *werden.*

Hiermit ist nun die Untersuchung des zweiten in § 4, p. 215 genannten Falles erledigt, und haben wir uns jetzt zu beschäftigen met dem dritten in § 4 genannten Fall, nämlich $[Y_1]_{x_\mu} = [Y_2]_{x_\mu}$, also auch reell.

d. $[Y_1]_{x_\mu} = [Y_2]_{x_\mu} = Y_0$.

§ 12. In diesem Falle machen wir in (2), p. 210, erstens folgende Substitution:

$$y = Y_0 + \eta.$$

Wir erhalten dann folgende Gleichung

$$\frac{d\eta}{dx} = \{\alpha + \beta Y_0 + \gamma Y_0^2 + (\beta + 2\gamma Y_0)\,\eta + \gamma\eta^2\}\,F(x) \quad \ldots \quad (16$$

Hierin sind $\alpha + \beta Y_0 + \gamma Y_0^2$ und $\beta + 2\gamma Y_0$ Functionen von x, die für x_μ stetig sind, und zwar unendlich klein werden. (Man beachte hierbei, dass Y_0 die Doppelwurzel ist der Gleichung $[\alpha + \beta u + \gamma u^2]_{x_\mu} = 0$.) Weiter ist auch γ für x_μ stetig und zwar von Null verschieden. (Siehe § 4, p. 214).

Indem wir nun die Functionen $\alpha + \beta Y_0 + \gamma Y_0^2$ und $\beta + 2\gamma Y_0$ zur Abkürzung mit Δ_1 und Δ_2 bezeichnen, haben wir also folgende Gleichung zu untersuchen

$$\frac{d\eta}{dx} = (\Delta_1 + \Delta_2\eta + \gamma\eta^2)\,F(x), \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

worin, wie wir oben bemerkt haben, Δ_1 und Δ_2 stetig sind für x_μ, und zwar gleich Null, während auch γ stetig ist für x_μ, aber von Null verschieden.

Die Function $F(x)$ schliesslich wird der Annahme nach derweise für x_μ unendlich gross, dass $\int F(x)\,dx$ auch unendlich gross wird für x_μ.

Nun lässt sich wieder nachweisen, dass, wenn η für x_μ stetig bleiben soll, $[\eta]_{x_\mu}$ eine Wurzel der Gleichung:

$$[\Delta_1]_{x_\mu} + [\Delta_2]_{x_\mu} u + [\gamma]_{x_\mu} u^2 = 0$$

sein muss. Die Wurzeln dieser Gleichung sind aber beide gleich Null, weil $[\Delta_1]_{x_\mu} = [\Delta_2]_{x_\mu} = 0$, $[\gamma]_{x_\mu} \neq 0$. (Siehe den Beweis in § 5, p. 215).

Auf der anderen Seite ist es unmöglich, dass η für x_μ derweise unendlich gross wird, dass sie in endlicher Nähe von x_μ stetig bleibt. (Siehe wiederum den Beweis in § 5, p. 215).

Weiter ist auch die Möglichkeit, dass η in endlicher Nähe von x_μ stetig bleibt, aber für x_μ unbestimmt wird, von vornherein ausgeschlossen. Denn in diesem Falle müsste $\frac{d\eta}{dx}$ unaufhörlich sein Vorzeichen wechseln indem x sich zu x_μ nähert. Dies kann in der Nähe von x_μ aber nur geschehen, wenn η gleich einem Functionswert der Einen oder der Andren der Functionen η_1 und η_2 wird, welche der Gleichung

$$\Delta_1 + \Delta_2 u + \gamma u^2 \equiv 0$$

genügen. (Siehe Gleichung (17)). Weil aber η_1 und η_2 für x_μ stetig sind, und zwar gleich Null werden, so müsste also die betreffende η-Function eben für x_μ stetig sein und zwar auch gleich Null werden, also nicht unbestimmt werden. (Siehe die Betrachtung in § 9, p. 222, anlässlich des Satzes g.)

Wir wollen nun, um die Untersuchung weiter zu führen, zwischen zwei folgenden Fällen unterscheiden, indem wir entweder die Werte von x, welche kleiner als x_μ sind, ins Auge fassen, oder diejenigen, welche grösser als x_μ sind:

Erstens: Es lässt sich ein Wert x_0 von x so bestimmen, dass in dem Intervalle (x_0, x_μ) die Function Δ_1, (welche, wie wir wissen, für x_μ unendlich klein wird), fortwährend stetig bleibt und dasselbe Vorzeichen behält.

Zweitens: Es lässt sich kein Wert x_0 von x so bestimmen, dass Δ_1 in dem Intervalle (x_0, x_μ) dasselbe Vorzeichen behält.

(Weil Δ_1 für x_μ stetig ist, ist es natürlich immer möglich x_0 so zu wählen, dass in (x_0, x_μ) Δ_1 stetig bleibt, dennoch kann Δ_1 unaufhörlich ihr Vorzeichen wechseln, weil sie für x_μ unendlich klein wird; sie kann also z. B. dasselbe Verhalten in der Nähe von x_μ zeigen, wie die Function $(x - x_\mu) \sin\left(\frac{1}{x - x_\mu}\right)$.)

§ 13. Im ersten Falle kann offenbar der Wert x_0 gleichzeitig so bestimmt werden, dass γ in (x_0, x_μ) dasselbe Vorzeichen behält (weil $[\gamma]_{x_\mu} \neq 0$), und dass:

entweder Δ_1 und γ entgegengesetzte Vorzeichen in (x_0, x_μ) haben, *oder* gleiche Vorzeichen in (x_0, x_μ) behalten.

Betrachten wir nun zuerst den Fall, dass Δ_1 und γ entgegengesetzte Vorzeichen in (x_0, x_μ) behalten.

Die Functionen η_1 und η_2, die der Gleichung

$$\Delta_1 + \Delta_2 u + \gamma u^2 \equiv 0$$

genügen, (siehe Gleichung (17), p. 228), sind in diesem Falle reell in (x_0, x_μ), und haben für jeden Wert von x in (x_0, x_μ) entgegengesetzte Vorzeichen, während sie für x_μ gleich Null werden. (Denn $[\Delta_1]_{x_\mu} = [\Delta_2]_{x_\mu} = 0$, und $[\gamma]_{x_\mu} \neq 0$).

Also ist in (x_0, x_μ) der kleinste Wert der einen Function, welche wir η_1 nennen wollen, gleich Null und gleich dem grössten Wert in (x_0, x_μ) der anderen Function η_2.

Dann aber wird man ohne Mühe einsehen, dass man mittelst ungefähr derselben Methode, wie diejenige, welche wir in den Paragraphen 8 und 9 pp. 217—223 entwickelt haben, und welche ausschliesslich begründet ist in den Voraussetzungen des Paragraphen 6, p. 217, zu folgendem, mit g von § 9, p. 222, übereinstimmenden Satze gelangen wird:

Nähert sich x zu x_μ, so können die η-Functionen (siehe Gl. (17), p. 228) *für x_μ entweder stetig bleiben oder derweise unendlich gross werden, dass sie in endlicher Nähe von x_μ stetig bleiben. Andre Möglichkeiten gibt es nicht.*

Nun wissen wir aber schon, dass, wenn η stetig bleibt für x_μ, $[\eta]_{x_\mu} = 0$ ist, und dass η unmöglich derweise unendlich gross werden kann für x_μ, dass sie in endlicher Nähe von x_μ stetig bleibt. (Siehe § 12, p. 229).

Also:

Die η-Functionen werden alle für x_μ unendlich klein, wenn man x bis x_μ zunehmen lässt (resp. abnehmen lässt), und wenn es schliesslich bei wachsendem x (resp. abnehmendem x) einen Wert x_0 gibt, so dass in (x_0, x_μ) die Functionen Δ_1 und γ fortwährend entgegengesetzte Vorzeichen behalten. (Siehe Gleichung (17), p. 228, und beachte, dass $[\Delta_1]_{x_\mu} = 0$ und $[\gamma]_{x_\mu} \neq 0$.)

Oder, indem wir zu den y-Functionen zurückkehren, und indem wir beachten, dass die oben in diesem Paragraphen definirten Functionen η_1 und η_2 in (x_0, x_μ) entgegengesetzte Vorzeichen behalten, und respective den Functionen $Y_1 - Y_0$ und $Y_2 - Y_0$ gleich sind, (siehe den Anfang des Paragraphen 12, p. 228):

Wenn $[Y_1]_{x_\mu} = [Y_2]_{x_\mu} = Y_0$, und wenn es schliesslich bei wachsendem x (resp. abnehmendem x) einen Wert x_0 gibt, so dass in (x_0, x_μ) die Functionen $Y_1 - Y_0$ und $Y_2 - Y_0$ fortwährend entgegengesetzte Vorzeichen behalten, so erhalten alle y-Functionen bei wachsendem x (resp. abnehmendem x) für x_μ den Wert Y_0.

§ 14. Wir haben uns jetzt zu beschäftigen mit dem Falle worin es bei wachsendem x (resp. abnehmendem x), schliesslich einen Wert x_0 gibt, so dass in (x_0, x_μ) die Functionen Δ_1 und γ fortwährend gleiche Vorzeichen behalten. (Siehe den Anfang des vorigen Paragraphen, p. 230).

In diesem Falle lässt sich von den Functionen η_1 und η_2, welche der Gleichung $\Delta_1 + \Delta_2 u + \gamma u^2$ genügen, nichts aussagen, was die Anwendung der bis jetzt benutzten Untersuchungsmethoden ohnehin möglich macht. Denn die Functionen η_1 und η_2 können in der unmittelbaren Nähe von x_μ complex oder reell sein, und wenn sie reell sind, haben sie notwendig gleiche Vorzeichen, weil Δ_1 und γ in (x_0, x_μ) gleiche Vorzeichen haben. Auch kann es sogar vorkommen, dass die Functionen η_1 und η_2 in endlicher Nähe von x_μ weder überall reell, noch überall complex sind, sondern unaufhörlich reell und complex werden, wenn nämlich $\Delta_2^2 - 4\Delta_1\gamma$ unaufhörlich ihr Vorzeichen ändert, indem sie unaufhörlich gleich Null wird.

Auf der anderen Seite führt die in § 5, p. 215, benutzte Methode nur dann zu einem bestimmten Resultat, wenn nicht nur die Functionen Y_1 und Y_2 (welche dieselbe Rolle spielen

wie η_1 und η_2) in der unmittelbaren Nähe von x_μ complex sind, sondern auch für x_μ selbst, während eben die Functionen η_1 und η_2 gleich Null sind für x_μ.

Und schliesslich stützt die in den Paragraphen 8 und 9, pp. 217—223, angewandte Methode, sich nicht nur auf die Voraussetzung, dass Y_1 und Y_2 reell sind für x_μ, sondern in erster Linie auch auf die Voraussetzung, dass der grösste Wert der einen Function in einem gewissen Intervalle (x_0, x_μ) kleiner sei als der kleinste Wert der andren Function in demselben Intervalle, (resp. gleich dem kleinsten Wert der andren Function sei). Jetzt aber sind die mit Y_1 und Y_2 übereinstimmenden Functionen η_1 und η_2 für x_μ gleich Null, und haben gleiche Vorzeichen, wenn sie in endlicher Nähe von x_μ reell bleiben; also muss der grösste Wert der einen Function grösser sein als der kleinste der Andren in jedem Intervalle (x_0, x_μ), worin die Functionen η_1 und η_2 überall reell bleiben.

Wir müssen uns also nach andren Untersuchungsmethoden umsehen, und dann liegt es auf der Hand, dass wir mit Hülfe einer möglichst einfachen Substitution die gegebene Riccatische Gleichung in eine andre umzuwandeln suchen, von der sich mit Anwendung der vorigen Resultate etwas Bestimmtes aussagen lässt. Dies gelingt in einfacher Weise, wenn die Function Δ_1 in endlicher Nähe von x_μ überall differentiirbar ist, also in einem Falle, welches man als selbstredend voraussetzen möchte.

Wenn nämlich Δ_1 differentiirbar ist, so machen wir in (17), p. 228, also in

$$\frac{d\eta}{dx} = (\Delta_1 + \Delta_2\eta + \gamma\eta^2)\,F(x)$$

folgende Substitution: $\eta = \Delta_1^{\frac{1}{2}}\zeta$, resp. $(-\Delta_1)^{\frac{1}{2}}\zeta$, wenn γ in dem Intervalle (x_0, x_μ) negativ ist. (Δ_1 und γ haben der Voraussetzung nach in (x_0, x_μ) gleiche Vorzeichen.)

Wir erhalten sodann folgende Differentialgleichung, indem wir uns nur mit dem Falle beschäftigen, woiin γ positiv ist in (x_0, x_μ):

$$\frac{d\zeta}{dx} = \left\{1 + \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{F(x)}\,\frac{d}{dx}(\Delta_1^{-\frac{1}{2}})\right)\zeta + \gamma\zeta^2\right\}\Delta_1^{\frac{1}{2}}\,F(x)\ldots(18)$$

Betrachten wir nun an erster Stelle die Function:

$$\frac{\Delta_2}{\Delta_1^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{F(x)} \frac{d}{dx} (\Delta_1^{-\frac{1}{2}}) \equiv \phi(x). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

Diese Function ist stetig in dem jetzt betrachteten Intervalle (x_0, x_μ), denn wir haben x_0 so bestimmt, dass Δ_1 in (x_0, x_μ) stetig und positiv bleibt, während auch Δ_2 und $F(x)$ stetig bleiben, und $F(x)$ nicht unendlich klein wird. (Man beachte hierbei, dass $F(x)$ der Voraussetzung nach für x_μ derweise unendlich gross wird, dass sie in endlicher Nähe von x_μ stetig bleibt.)

Hinsichtlich dieser Function $\phi(x)$ sind also folgende drei Fälle möglich:

Erstens: $\phi(x)$ wird unendlich gross für x_μ, (und bleibt in endlicher Nähe von x_μ stetig, d. h. in (x_0, x_μ).)

Zweitens: $\phi(x)$ ist stetig für x_μ.

Drittens: $\phi(x)$ ist unbestimmt für x_μ. (Sie verhält sich also z. B. wie die Function $\sin\left(\frac{1}{x - x_\mu}\right)$.)

§ 15. Im ersten Falle können wir Gleichung (18) folgendermassen ansetzen:

$$\frac{d\zeta}{dx} = \left\{ \frac{1}{\phi(x)} + \zeta + \frac{\gamma}{\phi(x)} \zeta^2 \right\} \phi(x) \Delta_1^{\frac{1}{2}} F(x), \quad . \quad . \quad (20)$$

worin $\phi(x)$ für x_μ unendlich gross wird, γ für x_μ stetig und endlich bleibt, während $\phi(x) \Delta_1^{\frac{1}{2}} F(x)$ in Folge der Gleichung (19) gleich $\Delta_2 F(x) - \frac{1}{2} \frac{1}{\Delta_1} \frac{d\Delta_1}{dx}$ ist.

Ziehen wir nun in Betracht, dass Δ_2 für x_μ unendlich klein wird, (siehe den Anfang des Paragraphen 12, p. 228), dass $\frac{1}{\Delta_1} \frac{d\Delta_1}{dx}$ solchermassen unendlich gross wird für x_μ, dass auch $\int \frac{1}{\Delta_1} \frac{d\Delta_1}{dx} dx$ unendlich gross wird für x_μ, weil Δ_1 unendlich klein wird für x_μ (und im Intervalle (x_0, x_μ) positiv bleibt), und dass schliesslich $F(x)$ unendlich gross wird für x_μ, und

zwar so, dass auch $\int F(x)\,dx$ unendlich gross wird für x_μ, so haben wir folgende drei Möglichkeiten zu discutiren:

Erstens: $\Delta_2 F(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta_1} \frac{d\Delta_1}{dx}$ wird unendlich gross für x_μ.

Zweitens: Diese Function bleibt stetig für x_μ.

Drittens: Diese Function ist zwar stetig in der Nähe von x_μ, wird aber unbestimmt für x_μ.

a. Im ersten Falle haben wir noch folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $\int \left\{ \Delta_2 F(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta_1} \frac{d\Delta_1}{dx} \right\} dx$ ist unendlich gross für x_μ.

Dann haben wir den in § 1, p. 211, als zweiten Hauptfall bezeichneten Fall vor uns. (Siehe § 1, p. 211, und auch die Gleichungen (2), p. 210, und (20), p. 233). Hier sind aber die mit a und γ der Gleichung (2), p. 210, correspondirenden Functionen $\frac{1}{\phi(x)}$ und $\frac{\gamma}{\phi(x)}$ unendlich klein für x_μ, weil $\phi(x)$ unendlich gross wird für x_μ. (Siehe den Anfang dieses Paragraphen.) [1])

Wir haben also jetzt einen in § 3, p. 213, eingehend betrachteten Fall vor uns, und aus der dortigen Betrachtung, welche uns auf die in § 11, p. 227, zusammengefassten Sätze zurückführt, wird man ohne Mühe folgern, dass von den jetzt betrachteten ζ Functionen eine und nur eine in stetiger Weise unendlich gross wird für x_μ (resp. eine und nur eine unendlich klein wird für x_μ), während alle die andren ζ-Functionen unendlich klein werden für x_μ, (resp. in stetiger Weise unendlich gross werden für x_μ). [2])

---

[1]) Weil $\phi(x)$ in endlicher Nähe von x_μ stetig bleibt, müssen die Functionen $\frac{1}{\phi(x)}$ und $\frac{\gamma}{\phi(x)}$ für x_μ derweise unendlich klein werden, dass sie in endlicher Nähe von x_μ von Null verschieden sind.

[2]) Dass die ζ-Functionen in stetiger Weise unendlich gross werden für x_μ, sich also nicht verhalten wie z. B. $\frac{1}{x - x_\mu}$ sec. $\left(\frac{1}{x - x_\mu}\right)$, ist eine Folge davon, dass $\frac{1}{\phi(x)}$ und $\frac{\gamma}{\phi(x)}$ nicht unaufhörlich unendlich klein werden, wenn x sich zu x_μ nähert. (Siehe die vorhergehende Note 1, und auch § 3, p. 213).

Weil nun die η-Functionen, die der Gleichung (17), p. 228, genügen, folgendermassen mit diesen ζ-Functionen zusammenhängen:

$$\eta = \Delta_1^{\frac{1}{2}}\zeta$$

(worin Δ_1 in dem Intervalle (x_0, x_μ) positiv und stetig bleibt, und für x_μ gleich Null ist),

und weil wir im Voraus wissen, (siehe § 12, p. 228) dass die η-Functionen für x_μ weder unendlich gross werden können, noch in stetiger Weise unbestimmt werden können, dass sie aber, wenn sie stetig sind für x_μ, gleich Null werden müssen,

so schliessen wir aus dem oben beschriebenen Verhalten der ζ-Functionen für x_μ, dass die η-Functionen für x_μ unendlich klein werden.

Indem wir nun zu den y-Functionen zurückkehren (Siehe den Anfang des Paragraphen 12, p. 228), so erhalten wir jetzt folgenden Satz:

Die y-Functionen nehmen für x_μ den Wert Y_0 *an.*

2. Wenn $\int \left\{ \Delta_2 F(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta_1} \frac{d\Delta_1}{dx} \right\} dx$ stetig ist für x_μ, so haben wir offenbar den in § 1, p. 211), als ersten Hauptfall bezeichneten Fall vor uns. (Vergleiche mit einander die Gleichungen (1) von § 1, p. 210, und (20) von § 15, p. 233, und beachte dass $\phi(x)$ unendlich gross wird für x_μ.)

Diesen ersten Hauptfall haben wir in § 2, p. 211, untersucht, und aus dem daselbst erhaltenen Resultate folgern wir, dass es immer eine und nur eine ζ-Function gibt, welche für x_μ einen willkürlich zu wählenden Wert annimmt.

Also werden die η-Functionen für x_μ unendlich klein, d. h. die y-Functionen werden auch in diesem Falle für x_μ gleich Y_0.

b. Betrachten wir jetzt den oben genannten zweiten Fall, nämlich, dass die Function $\Delta_2 F(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta_1} \frac{d\Delta_1}{dx}$ stetig bleibt für x_μ.

Dann sind die in Gleichung (20), p. 233, mit a, b und c der allgemeinen Gleichung (1), p. 210, übereinstimmenden Functionen auch für x_μ stetig, und dann wissen wir, dass es immer eine und nur eine ζ-Function gibt, welche für x_μ einen

willkürlich zu wählenden Wert annimmt. (Siehe die Noten 1 und 2 zu § 2 auf p. 211).

Also erhält jede y-Function für x_μ den Wert Y_0.

c. Der dritte Fall schliesslich, worin nämlich die Function $\Delta_2 F(x) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta_1} \frac{d\Delta_1}{dx}$ in stetiger Weise unbestimmt wird für x_μ, ist nicht zu den vorher betrachteten Fällen zurückzuführen, denn die in der Gleichung (2), p. 210, vorkommenden Functionen α, β und γ haben für x_μ bestimmte Werte, während $F(x)$ solchermassen für x_μ unendlich gross wird, dass sie in endlicher Nähe von x_μ überall stetig ist, und auf diese Eigenschaften stützen sich vorhergehende Betrachtungen. Dahingegen sind in Gleichung (20), p. 233, die mit α, β und γ von (2), p. 210, übereinstimmenden Functionen zwar stetig für x_μ, aber die mit $F(x)$ übereinstimmende Function ist jetzt derweise unstetig für x_μ, dass sie in stetiger Weise unbestimmt wird für x_μ. Wir wollen aber diesen Fall jetzt unbetrachtet lassen.

§ 16. Betrachten wir nun den an zweiter Stelle am Schluss des Paragr. 14, p. 233, genannten Fall, nämlich denjenigen, worin die Function $\phi(x)$ stetig bleibt für x_μ. (Siehe für die Definition von $\phi(x)$ die Gleichung 19, p. 233).

In diesem Falle ziehen wir die Gleichung (18) in Betracht, nämlich:

$$\frac{d\zeta}{dx} = \{1 + \phi(x)\zeta + \gamma\zeta^2\} \, \Delta_1^{\frac{1}{2}} F(x), \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

worin

$$\phi(x) \text{ oder } \frac{\Delta_2}{\Delta_1^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\Delta_1^{\frac{1}{2}} F(x)} \cdot \frac{1}{\Delta_1} \frac{d\Delta_1}{dx}$$

der Voraussetzung nach stetig bleibt für x_μ, während Δ_2 und Δ_1 auch stetig bleiben für x_μ, und zwar unendlich klein werden, und $F(x)$ solchermassen unendlich gross wird für x_μ, dass dies auch der Fall ist mit $\int F(x)\,dx$.

a. Wenn nun $\Delta_1^{\frac{1}{2}} F(x)$ stetig bleibt für x_μ, oder derweise unendlich gross wird für x_μ, dass $\int \Delta_1^{\frac{1}{2}} F(x)\,dx$ stetig bleibt für x_μ, so erhellt aus denselben Gründen wie im vorigen Paragraphen, dass die ζ-Functionen für x_μ jeden willkürlich zu

wählenden Wert annehmen, *dass also die y-Functionen für* x_μ *den Wert* Y_0 *erhalten.*

b. Wenn aber $\Delta_1^{\frac{1}{2}} F(x)$ solchermassen unendlich gross wird für x_μ, dass dies auch mit $\int \Delta_1^{\frac{1}{2}} F(x)\, dx$ der Fall ist, so haben wir den in § 1, p. 211, als zweiten Hauptfall bezeichneten Fall vor uns.

Weil nun $[\gamma]_{x_\mu} \neq 0$ ist, so sind die Functionen ζ_1 und ζ_2, welche der Gleichung:

$$1 + \phi(x)\, u + \gamma u^2 \equiv 0$$

genügen, stetig für x_μ, und haben wir folgende drei Fälle zu unterscheiden:

Erstens: A. W. $[\phi(x)]_{x_\mu} > 2\, [\gamma^{\frac{1}{2}}]_{x_\mu}$, also $[\zeta_1]_{x_\mu}$ und $[\zeta_2]_{x_\mu}$ reell und von einander verschieden.

Zweitens: A. W. $[\phi(x)]_{x_\mu} < 2\, [\gamma^{\frac{1}{2}}]_{x_\mu}$, also $[\zeta_1]_{x_\mu}$ und $[\zeta_2]_{x_\mu}$ complex, resp. imaginär.

Drittens: A. W. $[\phi(x)]_{x_\mu} = 2\, [\gamma^{\frac{1}{2}}]_{x_\mu}$, also $[\zeta_1]_{x_\mu} = [\zeta_2]_{x_\mu}$, also auch reell.

wo A. W. die Abkürzung ist von: Absoluter Wert.

Im ersten Falle lassen sich die Sätze des Paragr. 11, p. 227, anwenden, mittelst welchen wir hinsichtlich der ζ-Functionen zu dem Schlusse gelangen, dass es eine und nur eine ζ-Function gibt, welche für x_μ den Wert $[\zeta_1]_{x_\mu}$ (resp. den Wert $[\zeta_2]_{x_\mu}$) annimmt; dass aber alle die andren ζ-Functionen den Wert $[\zeta_2]_{x_\mu}$ (resp. den Wert $[\zeta_1]_{x_\mu}$) für x_μ annehmen.

Oder:

Jede y-Function erhält für x_μ *den Wert* Y_0.

Im zweiten Falle haben wir den in § 5, p. 215, betrachteten Fall vor uns. Wir können also den am Schlusse dieses Paragraphen erhaltenen Satz auf die ζ-Functionen anwenden, und erhalten also Folgendes:

Die ζ-Functionen werden unaufhörlich unendlich gross, indem sich x dem x_μ nähert, und ändern dabei ihr Vorzeichen. (Siehe Note 2 bei § 5, p. 216).

Die y-Functionen werden also auch unaufhörlich unendlich

gross, indem sich x dem x_μ nähert, und ändern dabei ihr Vorzeichen.

Im dritten Falle sind wir wieder in derselben Lage wie im Anfang des Paragraphen 12, p. 228, und müssen also hinsichtlich der ζ-Functionen von Neuem dieselbe Untersuchung anfangen, wie wir sie hinsichtlich der y-Functionen in dieser Abteilung d bis jetzt durchgeführt haben.

c. Schliesslich haben wir noch den Fall zu betrachten, worin $\Delta_1^{\,i}$ F (x) in stetiger Weise unbestimmt wird für x_μ. Diesen Fall wollen wir jetzt unberührt lassen. (Siehe den übereinstimmenden Fall *c* in § 15, p. 236).

§ 17. In den vorhergehenden Paragraphen 13—16, pp. 230—238, haben wir zu einer gewissen Höhe den ersten am Schluss des Paragr. 12, p. 229, genannten Fall untersucht. Jetzt also müssen wir den daselbst an zweiter Stelle genannten Fall näher betrachten.

Es ist mir aber nicht gelungen in diesem Falle nennenswerte Resultate zu erhalten. Wir wollen also auf diesen Fall in dieser Abhandlung nicht näher eingehn.

An dieser Stelle möchten wir aber noch zwei Sätze besonders hervorheben:

Erstens: Ist es uns auf irgend welcher Weise gelungen nachzuweisen, dass die η-Functionen, welche folgender Gleichung genügen:

$$\frac{d\eta}{dx} = (\Delta_1 + \Delta_2\eta + \gamma\eta^2)\,\mathrm{F}(x). \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (\alpha)$$

(worin Δ_1 und Δ_2 gegebene Functionen sind und für x_μ unendlich klein werden, $[\gamma]_{x_\mu} \neq 0$ und stetig, F (x) derweise unendlich gross ist für x_μ, dass auch $\int \mathrm{F}(x)\,dx$ unendlich gross ist für x_μ; siehe § 12, p. 228),

für x_μ unendlich klein werden, so werden auch die u-Functionen für x_μ unendlich klein, welche der folgenden Gleichung genügen:

$$\frac{du}{dx} = (\varepsilon_1 + \Delta_2 u + \gamma u^2)\,\mathrm{F}(x), \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (\beta)$$

worin ε_1 für x_μ derweise unendlich klein wird, dass $\Delta_1 - \varepsilon_1$ in endlicher Nähe von x_μ dasselbe Vorzeichen hat wie γ.

Beweis: Machen wir nämlich in (β) die Substitution

$$u = \eta + (u - \eta)$$

so erhalten wir folgende Differentialgleichung für $(u - \eta)$:

$$\frac{d(u-\eta)}{dx} = \left\{ \varepsilon_1 + \Delta_2\eta + \gamma\eta^2 - \frac{1}{F(x)}\frac{d\eta}{dx} + (\Delta_2 + 2\gamma\eta)(u-\eta) + \gamma(u-\eta)^2 \right\} F(x)$$

worin η ein Integral der Gleichung (α) ist; also können wir obige Differentialgleichung für $(u - \eta)$ auch folgendermassen ansetzen:

$$\frac{d(u-\eta)}{dx} = \{-(\Delta_1 - \varepsilon_1) + (\Delta_2 + 2\gamma\eta)(u-\eta) + \gamma(u-\eta)^2\} F(x) \;.\,.\; (\gamma)$$

Nun wissen wir aber, dass η für x_μ unendlich klein wird, während $-(\Delta_1 - \varepsilon_1)$ in endlicher Nähe das entgegengesetzte Vorzeichen von γ hat, und Δ_2 für x_μ unendlich klein wird. Also haben wir in Gleichung (γ) den in § 13, p. 230, betrachteten Fall vor uns; also werden die Functionen $(u - \eta)$ unendlich klein für x_μ, d. h. die u-Functionen werden für x_μ unendlich klein.

Zweitens: Werden die η-Functionen, welche der Gleichung (α) genügen, unendlich viele Male unendlich gross, indem sich x zu x_μ nähert, so müssen sich die v-Functionen, welche der Gleichung:

$$\frac{dv}{dx} = (\varepsilon_1 + \Delta_2 v + \gamma v^2)\, F(x) \;.\;.\;.\;.\;.\; (\delta)$$

genügen, gerade so verhalten, wenn nämlich ε_1 derweise für x_μ unendlich klein wird, dass $\Delta_1 - \varepsilon_1$ in endlicher Nähe von x_μ das entgegengesetzte Vorzeichen von γ besitzt.

Beweis. Wenn nämlich die v-Functionen sich nicht in der oben beschriebenen Weise verhielten, so müssten sie notwendig für x_μ unendlich klein werden. (Siehe § 12, p. 229). Dann müssten aber die η-Functionen in Folge des vorigen Satzes gleichfalls unendlich klein werden für x_μ, was der Voraussetzung widerspricht. (Die v-Functionen stehen jetzt zu den η-Functionen in demselben Verhältniss, wie in dem vorigen Satze die η-Functionen zu den u-Functionen.)

Diese Sätze können benutzt werden um womöglich, wenn Δ_1

nicht differentiirbar ist in der Nähe von x_μ, über das Verhalten der η-Functionen zu entscheiden. (Siehe die der Gleichung (18) in § 14, p. 231, vorhergehenden Betrachtung.)

Natürlich kann man auch eine in der Nähe von x_μ differentiirbare Function ε_1 solcherweise zu bestimmen suchen, dass sie für x_μ unendlich klein wird, und dass $\frac{\Delta_1}{\varepsilon_1}$ stetig ist für x_μ; ist dies gelungen so substituire man $\eta = \varepsilon_1^{\frac{1}{2}}\zeta$ in Gleichung (17) des Paragraphen 12, p. 228, und gebrauche die in den Paragr. 14—16, pp. 231—238, benutzte Methode.

e. Zusammenfassung der im Vorhergehenden erhaltenen Resultate.

§ 18. Es wird nun wohl nötig sein die bis jetzt erhaltenen Resultate zusammenzufassen. Also:

Wenn eine Riccatische Gleichung gegeben ist

$$\frac{dy}{dx} = a + by + cy^2,$$

worin Eine oder Mehrere der Functionen a, b und c unendlich gross werden für einen gewissen Wert x_μ, und zwar derweise, dass sich obige Gleichung in folgender Gestalt schreiben lässt:

$$\frac{dy}{dx} = (\alpha + \beta y + \gamma y^2)\,\mathrm{F}(x),$$

worin $\mathrm{F}(x)$ für x_μ unendlich gross wird und in endlicher Nähe von x_μ stetig bleibt, während α, β und γ stetig sind für x_μ, und mindestens eine dieser Functionen für x_μ einen endlichen Wert annimmt,

so haben wir an erster Stelle zwischen folgenden zwei Fällen zu unterscheiden:

A: $\int \mathrm{F}(x)\,dx$ bleibt stetig für x_μ.

B: $\int \mathrm{F}(x)\,dx$ wird unendlich gross für x_μ.

A. Im ersten Falle gibt es immer eine und nur eine y-Function, welche für x_μ einen willkürlich zu wählenden Wert annimmt, resp. unendlich gross wird. Andre y-Functionen gibt es für x_μ und in dessen Nähe nicht.

B. Im zweiten Falle setzen wir erstens voraus, dass $[\gamma]_{x_\mu} \neq 0$ sei, und ziehen dann die Functionen Y_1 und Y_2 in Betracht, welche folgender Gleichung genügen:

$$\alpha + \beta Y + \gamma Y^2 \equiv 0.$$

Dann haben wir wieder zwischen folgenden drei Fällen zu unterscheiden:

a. $[Y_1]_{x_\mu}$ und $[Y_2]_{x_\mu}$ complex, resp. imaginär.

b. $[Y_1]_{x_\mu}$ und $[Y_2]_{x_\mu}$ reell und von einander verschieden.

c. $[Y_1]_{x_\mu}$ und $[Y_2]_{x_\mu}$ einander gleich, also auch reell. [1])

§ 19. *Im Falle a* wird jede y-Function unaufhörlich unendlich gross, indem x sich zu x_μ nähert, und zwar derweise, dass sie für $x_1 - 0$ dasselbe Vorzeichen wie $\gamma F(x)$ hat, und das entgegengesetzte für $x_1 + 0$ (x_1 ist ein Wert von x in der unmittelbaren Nähe von x_μ, für welchen y unendlich gross wird.) Also ändert sie, indem sie in der Nähe von x_μ unendlich gross wird, ihr Vorzeichen.

Weil $\frac{dy}{dx}$ in der unmittelbaren Nähe von x_μ dasselbe Vorzeichen behält, nämlich dasjenige von $\gamma F(x)$, muss y unendlich klein werden, und zwar nur einmal, zwischen zwei aufeinander folgenden Werten von x, für welche sie unendlich gross wird.

Im Falle b gibt es immer eine und nur eine y-Function, welche für x_μ gleich dem Einen der Werte $[Y_1]_{x_\mu}$ und $[Y_2]_{x_\mu}$ wird, während alle die andren y-Functionen gleich dem Andren werden. Bezeichnen wir die eine, den Andren gegenübergestellte, y-Function mit y_μ, und ist $[Y_1]_{x_\mu}$ der grösste der Werte $[Y_1]_{x_\mu}$ und $[Y_2]_{x_\mu}$, so ist Folgendes zu bemerken:

---

[1]) Denn die Functionen α, β, γ und $F(x)$ sind reelle Functionen der reellen Veränderlichen x. Weiter bemerken wir noch, dass Y_1 und Y_2 stetig sind für x_μ, weil α, β und γ stetig sind für x_μ und weil $[\gamma]_{x_\mu} \neq 0$.

$[y_\mu]_{x_\mu} = [Y_1]_{x_\mu}$, wenn x wächst bis x_μ und $\gamma F(x)$ positiv ist für $x_\mu - 0$;
resp. wenn x abnimmt bis x_μ und $\gamma F(x)$ negativ ist für $x_\mu + 0$.

$[y_\mu]_{x_\mu} = [Y_2]_{x_\mu}$, wenn x wächst bis x_μ und $\gamma F(x)$ negativ ist für $x_\mu - 0$;
resp. wenn x abnimmt bis x_μ und $\gamma F(x)$ positiv ist für $x_\mu + 0$.

Im Falle c haben wir $[Y_1]_{x_\mu} = [Y_2]_{x_\mu} = Y_0$, und substituiren wir $\eta + Y_0$ für y in die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = (\alpha + \beta y + \gamma y^2)\,F(x).$$

Dann erhalten wir folgende Gleichung:

$$\frac{d\eta}{dx} = (\Delta_1 + \Delta_2\eta + \gamma\eta^2)\,F(x),$$

wo:

$$\Delta_1 = \alpha + \beta Y_0 + \gamma Y_0^2,\quad \Delta_2 = \beta + 2\gamma Y_0;\quad [\Delta_1]_{x_\mu} = 0;\quad [\Delta_2]_{x_\mu} = 0;$$
und $[\gamma]_{x_\mu} \neq 0$ und endlich.

1^s: Lässt sich nun ein Wert x_0 derweise bestimmen, dass Δ_1 und γ in (x_0, x_μ) fortwährend entgegengesetzte Vorzeichen behalten, so erhalten alle y-Functionen den Wert Y_0, indem x von x_0 bis x_μ variirt.

2^s: Lässt sich ein Wert x_0 so bestimmen, dass die Functionen Δ_1 und γ gleiche Vorzeichen behalten in (x_0, x_μ), und ist Δ_1 differentiirbar, so machen wir folgende Substitution:

$$\eta = \Delta_1^{\frac{1}{2}}\zeta \text{ (resp. } \eta = (-\Delta_1)^{\frac{1}{2}}\zeta, \text{ wenn } \gamma < 0 \text{ ist in } (x_0, x_\mu)).$$

Indem wir uns nun weiter begnügen mit der Betrachtung des Falles, worin γ positiv ist in (x_0, x_μ), so erhalten wir folgende Gleichung für die Function ζ:

$$\frac{d\zeta}{dx} = \left\{1 + \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{F(x)}\frac{d}{dx}(\Delta_1^{-\frac{1}{2}})\right)\zeta + \gamma\zeta^2\right\}\Delta_1^{\frac{1}{2}}\,F(x).$$

Ist $\Delta_1^{\frac{1}{2}}F(x)$ *stetig für* x_μ *oder wird diese Function für* x_μ

derweise unendlich gross, dass $\int \Delta_1^{\frac{1}{2}} F(x)\, dx$ *stetig bleibt für* x_μ, so erhalten alle y-Functionen für x_μ den Wert Y_0, indem x von x_0 bis x_μ variirt.

Ist $\Delta_1^{\frac{1}{2}} F(x)$ *solchermassen unendlich gross für* x_μ, *dass* $\int \Delta_1^{\frac{1}{2}} F(x)\, dx$ *ebenfalls unendlich gross wird für* x_μ, so sind folgende Fälle zu unterscheiden:

Der absolute Wert von $\left[\frac{\Delta_2}{\Delta_1^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{F(x)} \frac{d}{dx} (\Delta_1^{-\frac{1}{2}})\right]_{x_\mu} > [2\gamma^{\frac{1}{2}}]_{x_\mu}$.

Dann erhalten alle y-Functionen für x_μ den Wert Y_0, wenn x variirt von x_0 bis x_μ;

Der absolute Wert von $\left[\frac{\Delta_2}{\Delta_1^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{F(x)} \frac{d}{dx} (\Delta_1^{-\frac{1}{2}})\right]_{x_\mu} < [2\gamma^{\frac{1}{2}}]_{x_\mu}$.

Dann werden die y-Functionen unaufhörlich unendlich gross indem x sich zu x_μ nähert, und zwar in der Weise, dass y für $x_1 - 0$ dasselbe Vorzeichen hat wie $\gamma\, F(x)$, und für $x_1 + 0$ das entgegengesetzte. (x_1 ist ein Wert von x in der unmittelbaren Nähe von x_μ, für welchen y unendlich gross wird.)

Der absolute Wert von $\left[\frac{\Delta_2}{\Delta_1^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{F(x)} \frac{d}{dx} (\Delta_1^{-\frac{1}{2}})\right]_{x_\mu} = [2\gamma^{\frac{1}{2}}]_{x_\mu}$.

Dann ist $[\zeta_1]_{x_\mu} = [\zeta_2]_{x_\mu}$, und müssen die ζ-Functionen in derselben Weise untersucht werden wie die y-Functionen in dem jetzt betrachteten Falle, wo $[Y_1]_{x_\mu} = [Y_2]_{x_\mu} = Y_0$. (Die Functionen ζ_1 und ζ_1 genügen der Gleichung:

$$1 + \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{F(x)} \frac{d}{dx} (\Delta_1^{-\frac{1}{2}})\right) u + \gamma u^2 \equiv 0.)$$

Die Fälle worin $\Delta_1^{\frac{1}{2}} F(x)$ *unbestimmt ist für* x_μ, *oder worin dies der Fall ist mit* $\frac{\Delta_2}{\Delta_1^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{F(x)} \frac{d}{dx} (\Delta^{-\frac{1}{2}})$ bleiben noch unberührt.

3°: Lässt sich zwar ein Wert x_0 derweise bestimmen, dass in (x_0, x_μ) die Functionen Δ_1 und γ gleiche Vorzeichen besitzen,

ist aber Δ_1 eine nicht differentiirbare Function, so suche man eine differentiirbare Function ε derweise zu bestimmen, dass $[\varepsilon]_{x_\mu} = 0$ und $\left[\frac{\Delta_1}{\varepsilon}\right]_{x_\mu}$ womöglich endlich ist; $\left(\left[\frac{\Delta_1}{\varepsilon}\right]_{x_\mu} = 0\right.$ wird auch in den meisten Fällen genügen.) Ist dies gelungen so substituire man in die Gleichung:

$$\frac{d\eta}{dx} = (\Delta_1 + \Delta_2\eta + \gamma\eta^2)\,F(x)$$

$\eta = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\zeta$, resp. $\eta = (-\varepsilon)^{\frac{1}{2}}\zeta$, wenn Δ_1, also auch γ, negativ ist,

und benutze, mutatis mutandis, die im vorhergehenden Falle gegebenen Kriterien.

Auch kann man eine Function δ solcherweise zu bestimmen suchen, dass in endlicher Nähe von x_μ die Function $\delta - \Delta_1$ dasselbe Vorzeichen wie γ hat, (resp. das entgegengesetzte Vorzeichen von γ besitzt), und dass weiter die Functionen u, welche der Gleichung:

$$\frac{du}{dx} = (\delta + \Delta_2 u + \gamma u^2)\,F(x),$$

genügen für x_μ unendlich klein werden, (resp. unaufhörlich unendlich gross werden, indem x sich zu x_μ nähert).

Dann werden die η-Functionen gleichfalls unendlich klein für x_μ, also die y-Functionen gleich Y_0, (resp. werden die η-Functionen, also auch die y-Functionen, unaufhörlich unendlich gross, indem x sich zu x_μ nähert.)

4^{e}: *Wird Δ_1 unaufhörlich unendlich klein indem x sich zu x_μ nähert*, dann besitzen wir noch nicht die Mittel um über das Verhalten der y-Functionen in der Nähe von x_μ zu entscheiden.

§ 20. Bis jetzt haben wir angenommen, dass in der Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = (\alpha + \beta y + \gamma y^2)\,F(x),$$

die Function γ für x_μ von Null verschieden sei. Diese Annahme wollen wir jetzt fallen lassen und unterscheiden dann folgende Fälle:

$$a: \quad [\alpha]_{x_\mu} \neq 0; \quad [\beta]_{x_\mu} \neq 0; \quad [\gamma]_{x_\mu} = 0.$$
$$b: \quad [\alpha]_{x_\mu} \neq 0; \quad [\beta]_{x_\mu} = 0; \quad [\gamma]_{x_\mu} = 0.$$
$$c: \quad [\alpha]_{x_\mu} = 0; \quad [\beta]_{x_\mu} \neq 0; \quad [\gamma]_{x_\mu} = 0.$$

Im Falle a betrachten wir die Gleichung:

$$\frac{d\left(\frac{1}{y}\right)}{dx} = -\left\{\gamma + \beta\left(\frac{1}{y}\right) + \alpha\left(\frac{1}{y}\right)^2\right\} F(x).$$

Weil hier die Functionen, welche der Gleichung:

$$\gamma + \beta u + \alpha u^2 \equiv 0$$

genügen, reelle und von einander verschiedene Werte für x_μ annehmen, nämlich Null und $-\left[\frac{\beta}{\alpha}\right]_{x_\mu}$, so können wir auf die Functionen $\frac{1}{y}$ den im vorigen Paragraphen im Falle b genannten Satz anwenden, woraus sich hinsichtlich der y-Functionen Folgendes ergibt:

Es gibt immer eine und nur eine y-Function, welche für x_μ unendlich gross wird, (resp. gleich $-\left[\frac{\alpha}{\beta}\right]_{x_\mu}$ wird), während alle die andren y-Functionen gleich $-\left[\frac{\alpha}{\beta}\right]_{x_\mu}$, (resp. unendlich gross) werden.

Bezeichnen wir die den andren y-Functionen gegenübergestellte y-Function mit y_μ, so ist noch Folgendes zu bemerken:

Wächst x bis x_μ und ist $\alpha F(x) > 0$ für $x_\mu - 0$, resp. nimmt x bis x_μ ab, und ist $\alpha F(x) < 0$ für $x_\mu + 0$, so ist:

$$[y_\mu]_{x_\mu} = \begin{cases} -\left[\frac{\alpha}{\beta}\right]_{x_\mu}, & \text{wenn } \left[\frac{\alpha}{\beta}\right]_{x_\mu} > 0 \\ \infty, & \text{wenn } \left[\frac{\alpha}{\beta}\right]_{x_\mu} < 0 \end{cases}$$

Wächst x bis x_μ, und ist $\alpha F(x) < 0$ für $x_\mu - 0$, resp.

nimmt x bis x_μ ab, und ist $\alpha F(x) > 0$ für $x_\mu + 0$, so ist:

$$[y_\mu]_{x_\mu} = \begin{cases} \infty \quad, \text{ wenn } \left[\frac{\alpha}{\beta}\right]_{x_\mu} > 0 \\ -\left[\frac{\alpha}{\beta}\right]_{x_\mu}, \text{ wenn } \left[\frac{\alpha}{\beta}\right]_{x_\mu} < 0. \end{cases}$$

Hierbei ist noch zu bemerken, dass y, wenn sie für x_μ unendlich gross wird, in endlicher Nähe von x_μ stetig ist, wenn γ in endlicher Nähe von x_μ von Null verschieden bleibt. Wenn aber γ unaufhörlich unendlich klein wird, indem x sich zu x_μ nähert, so bleibt die Möglichkeit offen, dass y derweise für x_μ unendlich gross wird, wie z. B. $\frac{1}{x - x_\mu} \sec.\left(\frac{1}{x - x_\mu}\right)$.

Im Falle b betrachten wir wiederum die Gleichung:

$$\frac{d\left(\frac{1}{y}\right)}{dx} = -\left\{\gamma + \beta\left(\frac{1}{y}\right) + \alpha\left(\frac{1}{y}\right)^2\right\} F(x).$$

Weil jetzt die Functionen, welche der Gleichung

$$\gamma + \beta u + \alpha u^2 \equiv 0$$

genügen, für x_μ unendlich klein werden, so haben wir jetzt die im vorigen Paragraphen im Falle c genannten Sätze anzuwenden, um über das Verhalten der Functionen $\frac{1}{y}$, also auch der Functionen y, zu entscheiden.

Wir wollen dies nicht weiter ausführen, nur bemerken wir, dass *entweder* alle die y-Functionen für x_μ in stetiger Weise unendlich gross werden, (siehe aber auch die Bemerkung, womit wir die Betrachtung des vorigen Falles geschlossen haben), *oder* unaufhörlich unendlich gross werden, indem x sich zu x_μ nähert, wobei noch zu bemerken ist, dass y für $x_1 - 0$ dasselbe Vorzeichen wie $\gamma F(x)$ hat, und für $x_1 + 0$ dass entgegengesetzte. (x_1 ist ein Wert von x in der unmittelbaren Nähe von x_μ; wenn γ unaufhörlich unendlich klein wird beim Annähern an die Stelle x_μ, so braucht y nicht immer ihr Vorzeichen zu ändern, indem sie für x_1 unendlich gross wird, aber jedenfalls wird sie auch unaufhörlich unendlich klein und

wechselt dabei ihr Vorzeichen, weil der Voraussetzung nach α für x_μ einen von Null verschieden Wert hat; siehe die Gleichung für y im Anfang des Paragraphen 18, p. 240).

Im Falle c machen wir in die Gleichung:

$$\frac{dy}{dx} = (\alpha + \beta y + \gamma y^2)\,\mathrm{F}(x)$$

folgende Substitution:

$$y = \frac{v}{1 + \mathrm{K}v}$$

wo K eine willkürliche (von Null verschiedene) Constante ist. Wir bekommen dann folgende Gleichung:

$$\frac{dv}{dx} = \{\alpha + (\beta + 2\alpha\,\mathrm{K})\,v + (\gamma + \beta\mathrm{K} + \alpha\,\mathrm{K}^2)\,v^2\}\,\mathrm{F}\,(x).$$

Offenbar haben wir jetzt den im vorigen Paragraphen mit *b* bezeichneten Fall vor uns (siehe p. 241). Jetzt ist aber die Eine der Functionen Y_1 und Y_2 für x_μ gleich Null und die Andre gleich $-\frac{1}{\mathrm{K}}$ also < 0, wenn wir K positiv wählen. Die mit $\gamma\mathrm{F}\,(x)$ übereinstimmende Function ist jetzt $(\gamma+\beta\mathrm{K}+\alpha\mathrm{K}^2)\,\mathrm{F}(x)$, oder weil nur das Vorzeichen dieser Function in Betracht gezogen wird, $\beta\mathrm{F}\,(x)$.

Indem wir nun die im Falle *b* des vorigen Paragraphen (siehe p. 241) geltenden Sätze anwenden, und dabei gleich zu den y-Functionen selbst zurückkehren, erhalten wir Folgendes:

Wenn x wächst bis x_μ, und wenn $\beta\mathrm{F}\,(x)$ positiv ist für $x_\mu - 0$, (resp. wenn x abnimmt bis x_μ, und wenn $\beta\mathrm{F}\,(x)$ negativ ist für $x_\mu + 0$), so gibt es immer eine und nur eine y-Function, welche für x_μ unendlich klein wird; alle die andren y-Functionen aber werden für x_μ unendlich gross.

Wenn x wächst bis x_μ, und wenn $\beta\mathrm{F}\,(x)$ negativ ist für $x_\mu - 0$, (resp. wenn x abnimmt bis x_μ, und wenn $\beta\mathrm{F}\,(x)$ positiv ist für $x_\mu + 0$), so gibt es immer eine und nur eine y-Function, welche für x_μ unendlich gross wird; alle die andren y-Functionen aber werden für x_μ unendlich klein.

(Wenn γ unaufhörlich unendlich klein wird, indem x sich zu x_μ nähert, so beachte man noch die Bemerkung, mit welcher wir die Betrachtung des Falles a in diesem Paragr. geschlossen haben; siehe p. 246).

Bevor wir die jetzige Untersuchung schliessen, wollen wir noch bemerken, dass, wenn man das Verhalten der y-Functionen für $x = \infty$ ermitteln will, die Substitution $x = \frac{1}{z}$ auf die im Vorhergehenden betrachteten Fälle zurückführt.

OPMERKINGEN OMTRENT DE BEWEGING IN EEN PLAT VLAK

DOOR

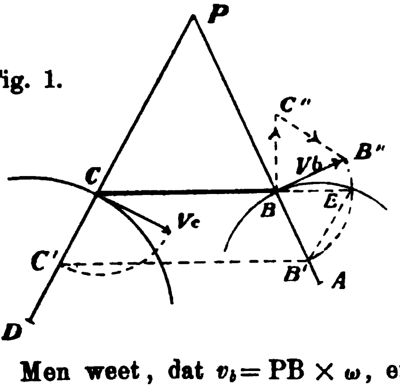
F. J. VAES.

(Rotterdam.)

Het volgende is een verzameling van aanteekeningen omtrent de beweging van een puntenstelsel in een plat vlak. Bekende eigenschappen zijn op andere wijze dan gewoonlijk afgeleid; enkele nieuwe eigenschappen zijn vermeld.

1. Zij BC (fig. 1) een stang, waarvan twee punten B en C genoodzaakt zijn te bewegen langs twee kromme lijnen in eenzelfde plat vlak gelegen. Is de wet van beweging van een der punten, bijv. B gegeven, dan is de wet van beweging van een willekeurig punt van de stang op eenvoudige wijze te vinden.

Fig. 1.



Zij $BC = l$, v_b de snelheid van B, v_c die van C, v_{b-c} de relatieve snelheid van B ten opzichte van C, j_b de versnelling van B, j_c die van C, j_{b-c} de relatieve versnelling van B ten opzichte van C, P het oogenblikkelijk draaiingsmiddelpunt, ω of $\frac{d\phi}{dt}$ de hoeksnelheid van het stelsel om P.

Men weet, dat $v_b = PB \times \omega$, en $v_c = PC \times \omega$.

Daar v_b bekend is, kan men v_c berekenen of ook construeeren op de volgende wijze:

Wanneer de lijnen, die de snelheden van de punten van BC in grootte en richting voorstellen, alle in dezelfde richting

90° om die punten gedraaid worden, dan liggen de uiteinden in een rechte lijn C'B'//CB. Maakt men dus BB' = v_b, en trekt men B'C'//BC, dan snijdt deze de lijn PC in C' zoodanig, dat CC' = v_c. Wordt B'E//C'C getrokken tot ze CB in E snijdt, dan is B'E = C'C = v_c. De derde zijde BE van △ BB'E heeft dan ook een beteekenis, zooals uit het volgende blijkt.

Men kan denzelfden driehoek BB'E nog anders vinden, door v_b op te vatten als resultante van v_c en de relatieve snelheid v_{b-c} van B ten opzichte van C. Ontbindt men dus BB'' = v_b in de richtingen B''C'' ⊥ PC, en BC'' ⊥ BC, dan is B''C'' = v_c, en BC'' $= v_{b-c} = l\omega = l\frac{d\phi}{dt}$. Draait men nu △ BB''C'' 90° om B, zoodat B'' in B' komt, dan komt hij in den stand van △BB'E, zoodat B'E = v_c, en BE $= l\frac{d\phi}{dt}$.

Men kan ook opmerken, dat △ BB'E ∾ △ PBC, zoodat:

$$BB' : PB = B'E : PC = BE : BC,$$

en dus

$$B'E = \frac{BB'}{PB} . PC = \omega . PC = v_c,$$

$$BE = BC . \omega = l . \omega.$$

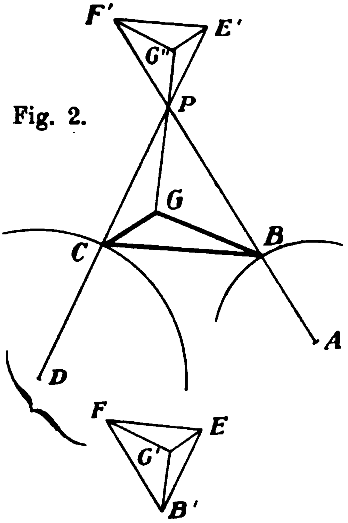


Fig. 2.

2. Het behoeft geen betoog, dat men (fig. 2) △ BB'E als afzonderlijke figuur kan teekenen, en dus uit een willekeurig punt B' de lijnen B'F//PB en = v_b, B'E//PC, en FE//BC kan trekken, om B'E = v_c, en FE = v_{b-c} te vinden. Men kan B' ook doen samenvallen met P, waardoor △ PF'E' ontstaat.

Om de snelheid te bepalen van een vast aan BC verbonden punt G, trekke men FG' of F'G''//BG, en B'G' of PG''//PG; dan is B'G' of PG'' de snelheid v_g van G.

Wanneer een aantal punten G een figuur vormen, dan vormen de punten G″ een symmetrisch gelijkvormige figuur met P als gelijkvormigheidspunt, en met de verhouding $1 : \frac{d\phi}{dt}$.

3. Omdat PF′ $= v_b$, PG″ $= v_g$, is F′G″ $= v_{g-b}$ de relatieve snelheid van G ten opzichte van B.

Omdat $\triangle$ PG″E′ $\sim \triangle$ PGC, is G″E′ $= v_{g-c}$ de relatieve snelheid van G ten opzichte van C.

Van den driehoek F′G″E′ zijn dus de 3 zijden:

F′E′ $= v_{b-c}$ de relatieve snelheid van B ten opzichte van C,
E′G″ $= v_{c-g}$ „ „ „ „ C „ „ „ G,
G″F′ $= v_{g-b}$ „ „ „ „ G „ „ „ B.

Men heeft dus de eigenschap:

1°. *Met de relatieve snelheden van drie punten* B, C *en* G *ten opzichte van elkander, kan men een driehoek vormen gelijkvormig met* $\triangle$ BCG.

Beschouwt men de punten B, C en P, dan heeft men als bijzonder geval:

2°. *Met de snelheden van twee punten* B *en* C, *en hunne relatieve snelheid kan men een driehoek vormen, gelijkvormig met* $\triangle$ BCP, *als* P *de pool is.*

4. Deze eigenschap kan worden uitgebreid over een willekeurig aantal punten. Want zijn (fig. 3) B, C, H en G vier punten, waarvoor

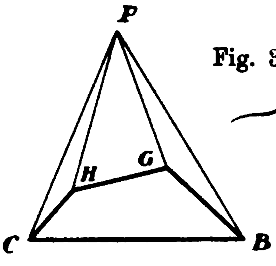
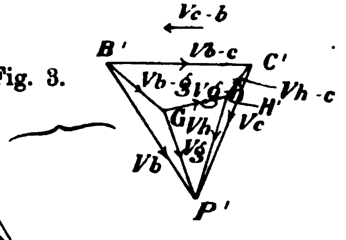


Fig. 3.



B′P′ $= v_b$, C′P′ $= v_c$, B′C′ $= v_{b-c}$, G′P′ $= v_g$, H′P′ $= v_h$, B′G′ $= v_{b-g}$, enz., dan is, als men G′H′ trekt, deze lijn $= v_{g-h}$.

Uit figuur B′G′H′C′ volgt dus als uitbreiding van 1°

3°. *Met de relatieve snelheden van een aantal punten* B,G,H . . .C *ten opzichte van elkander, kan men een veelhoek vormen, gelijkvormig met veelhoek* BGH . . . C.

En uit figuur P′B′G′H′C′ de uitbreiding van 2°:

4°. *Met de snelheden van twee punten* B *en* C, *en de relatieve snelheden*

van B *ten opzichte van een* 3e *punt* G,
„ G „ „ „ „ 4e „ H,
„ H „ „ „ „ *het* „ C,

kan men een veelhoek vormen, gelijkvormig met veelhoek PBGH . . . C.

5. Geleid door de overeenkomst van de voorgaande constructies met het krachtenpolygoon der Graphostatica kunnen de eigenschappen ook in den volgenden vorm gebracht worden.

1°. *De relatieve snelheden van een puntenstelsel zijn in evenwicht.*

2°. *De snelheden van een punt, en de relatieve snelheden van elk der andere punten ten opzichte van het voorgaande, zijn in evenwicht. De pool rekent dan mede als punt van het stelsel, waarvan de relatieve snelheid ten opzichte van het voorgaande punt (B), gelijk is maar tegengesteld aan de snelheid* (v_b) *van dat punt.*

6. Evenzoo zou men v_b kunnen beschouwen als resultante van v_{b-g}, v_{g-h}, v_{h-c} en v_c, en v_{b-c} als resultante van v_{b-g}, v_{g-h}, en v_{h-c}, en zou kunnen schrijven

$$v_b \equiv v_{b-g} + v_{g-h} + v_{h-c} + v_c,$$
$$v_{b-c} \equiv v_{b-g} + v_{g-h} + v_{h-c}.$$

Het streepje tusschen *b* en *c* is afkorting voor de woorden „ten opzichte van.” Beschouwt men het echter als *minus*teeken, dan blijkt de index van het 1e lid gelijk te zijn aan de som der indices in het 2e lid. De veelhoeken, samengesteld uit snelheden en relatieve snelheden, kunnen *snelheidspolygonen* worden genoemd.

7. Zij (fig. 4) ten tijde t : B′F $= v_{b-g}$, B′E $= v_{g-c}$, FE $= v_{b-c}$, en ten tijde $t + \Delta t$: B′F′ $= v'_{b-g}$, B′E′ $= v'_{g-c}$, F′E′ $= v'_{b-c}$, dan is FF′ de verandering van v_{b-g} in richting

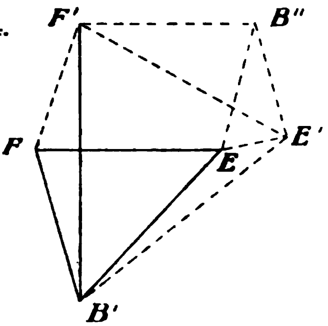
en grootte, EE′ die van v_{g-c}, en als men F′B″ ⋕ FE, en EB″ ⋕ FF′ trekt, B″E′ die van v_{b-c}.

Men weet, dat $\text{Lim.} \frac{FF'}{\Delta t} = j_{b-g}$, $\text{Lim.} \frac{EE'}{\Delta t} = j_{g-c}$, $\text{Lim.} \frac{B''E'}{\Delta t} = j_{b-c}$, en de driehoek, gevormd door deze drie relatieve versnellingen is gelijkvormig met △ BCG, omdat zoowel △ B′FE als △ B′F′E′ ∾ met △ BCG zijn, en dus

$$FF' \text{ (of } B''E) : B'F = EE' : B'E = B''E' : EF,$$

en $\angle (FF', B'F) = \angle (EE', B'E) = \angle (B''E', EF)$.

Fig. 4.



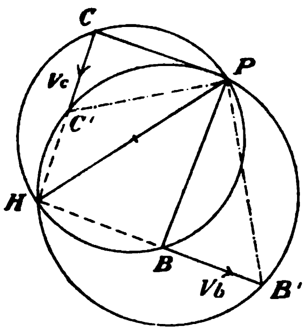
De versnellingen maken blijkbaar met de overeenkomstige zijden van △ BCG een hoek α, die het complement is van Lim. ∠(FF′, B′F).

8. Evenals in fig. 3 voor de snelheden is gedaan, kan men een puntenstelsel beschouwen, en vindt dan de eigenschap:

De relatieve versnellingen van een puntenstelsel zijn in evenwicht.

Als men van drie relatieve versnellingen eene als absoluut beschouwt, bijv. j_{b-g}, dan heeft G een versnelling nul, en de versnellingen van C, en van elk ander punt van het stelsel ten opzichte van G zijn dan even eens absoluut. Een dergelijk eigenschap als de laatstvermelde voor de snelheden geldt dan ook voor de versnellingen.

Fig. 5

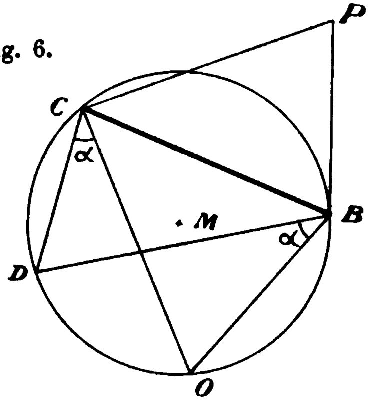


9. Zijn (fig. 5) P de pool, B en C twee punten, gelegen op een cirkel door P. De richtingen der snelheden van B, C en andere punten van den cirkel gaan door H, het uiteinde van de middellijn door P.

Trekt men uit elk punt van het stelsel lijnen in richting en grootte gelijk aan de snelheid van dat punt, dan vormen de uiteinden een

puntenstelsel gelijkvormig met het eerste. Want (fig. 5) $CC' = \omega . PC$, $BB' = \omega . PB$, enz., $PC' = \sqrt{1+\omega^2} \times PC$, $PB' = \sqrt{1+\omega^2} \times PB$, enz., $\angle CPC' = \angle BPB'$ enz., zoodat men het stelsel B'C'... verkrijgt door de voerstralen PC enz. in dezelfde reden te vergrooten, en in dezelfde richting eenzelfden hoek te draaien. Het geheele stelsel wordt dus $\sqrt{1+\omega^2}$ maal vergroot, en over den genoemden hoek gedraaid.

Fig. 6.

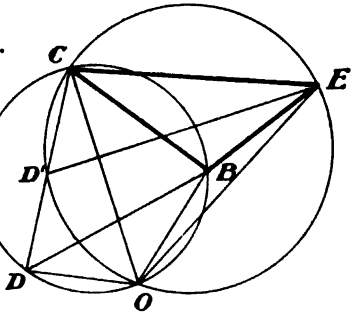


10. Zijn (fig. 6) O de versnellingspool, α de versnellingshoek, B en C twee punten, gelegen op een cirkel door O, CD en BD de richtingen der versnellingen van B en C, dan snijden die elkander in een punt D van den cirkel, op een afstand van O

$$OD = 2R \sin \alpha.$$

11. Kent men (fig. 7) de richtingen der versnellingen van drie punten, dan kan men O vinden. Want zijn B, C en E de punten, CD, BD en ED' de versnellingsrichtingen, dan ligt O zoowel op cirkel CBD als op cirkel ECD', en is dus het snijpunt van deze.

Fig. 7.



12. Trekt men uit elk punt lijnen in richting en grootte gelijk aan de versnelling van dat punt, dan vormen de uiteinden een puntenstelsel, gelijkvormig met het eerste. Het bewijs is analoog dat in N°. 10, terwijl door toepassing van den cosinusregel op den driehoek, waarvan de voerstraal uit O en de versnelling zijden zijn, die den versnellingshoek α insluiten, onmiddellijk blijkt, dat de vergrooting is als 1 tot

$$\sqrt{1+\left(\frac{d\omega}{dt}\right)^2 - 2\frac{d\omega}{dt}\cos\alpha},$$

en de sinus van den draaiingshoek gelijk is aan

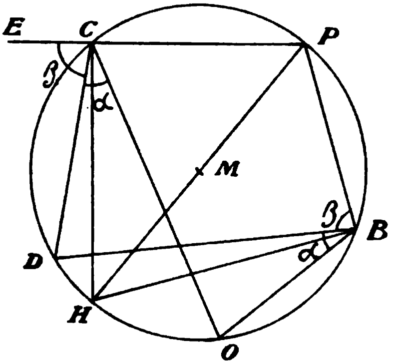
$$\sin \alpha \times \frac{d\omega}{dt} \text{ gedeeld door den wortelvorm.}$$

13. Punten, waarvan de versnelling eenzelfden hoek β maakt met den normaal van de door die punten beschreven banen, liggen op een cirkel, op OP beschreven, die een hoek $\alpha + \beta$ bevat.

Want (fig. 8) $\angle$ ECO $= \angle$ PBO $= \alpha + \beta$. De cirkel gaat ook door de in fig. 5 en 6 aangegeven punten H en D.

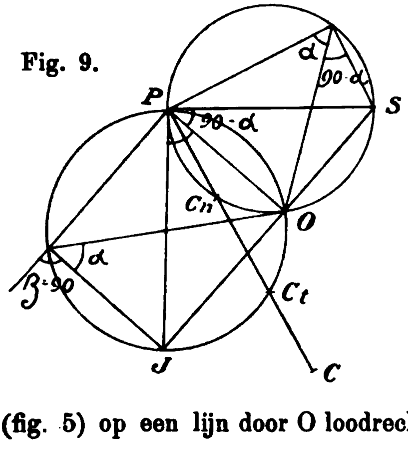
Geeft men aan β de bijzondere waarden 90° en 0°, dan verkrijgt men de beide cirkels van BRESSE, door welker snijding de versnellingspool gewoonlijk bepaald wordt.

Fig. 8.



Voor $\beta = 90°$ vallen D en H samen tot een punt J, dus is $\angle$ JPO $= \alpha$ (fig. 9), en JP normaal van de poolbanen.

Fig. 9.



Voor $\beta = 0$ valt D in P, en ligt het middelpunt van den cirkel op de raaklijn der poolbanen.

Voor punten van cirkel PJ zijn de versnellingen rakend aan de banen der punten, dus tangentiëel, voor punten van cirkel PS is de versnelling normaal.

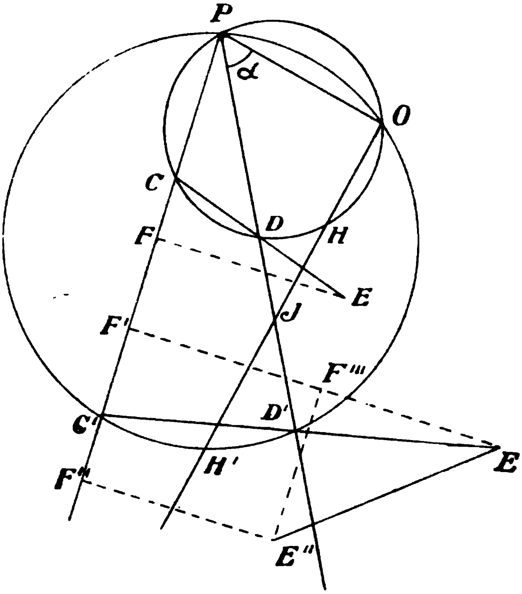
14. Van cirkels op PO beschreven liggen de punten H (fig. 5) op een lijn door O loodrecht op OP, de punten D (fig. 6)

op een lijn door P, makende een hoek $= \alpha$ met OP. Het snijpunt van die twee lijnen is J.

15. Zijn C en C′ (fig. 10) twee punten met versnellingen CE en C′E′, dan is C′E′ resultante van CE en de relatieve versnelling E′E″ van C′ ten opzichte van C.

Liggen C en C′ op eenzelfde lijn door P, dan is daarenboven de normale versnelling C′F′ van C′ resultante van de

Fig. 10.



normale versnelling CF van C, en de relatieve normale versnelling F″F′, en evenzoo de tangentiëele versnelling E′F′ resultante van de tangentiëele versnelling EF, en de relatieve tangentiëele versnelling E′F‴.

Hieruit volgt een eigenschap, die door Pröll (Civil. Ingenieur 1879) analytisch is afgeleid:

De voerstraal PC (fig. 9) van een willekeurig punt C snijdt den tangentiëelen cirkel van Bresse in C_t, en den normalen cirkel in C_n zoodanig, dat de normale versnelling van C resultante is van de normale versnelling van C_t (welke nul is), en de relatieve normale versnelling van C ten opzichte van C_t; d w.z. de normale versnelling van C is gelijk aan de relatieve normale versnelling van C ten opzichte van C_t. Evenzoo is

de tangentiëele versnelling van C resultante van de tangentieële versnelling van C_n (welke nul is) en de relatieve tangentiëele versnelling van C ten opzichte van C_n, d. w. z. de tangentiëele versnelling van C is gelijk aan de relatieve tangentiëele versnelling van C ten opzichte van C_n.

Gevolg: punten met gelijke normale of tangentiëele versnellingen liggen op limaçons, want om zulke punten te vinden, moet men door P lijnen trekken, en daarop van af de punten C_t (of C_n) gelijke stukken afzetten.

16. Zijn (fig. 11) P de pool ten tijde t, P′ ten tijde $t + \Delta t$, $\angle CPB = \alpha$, $\angle C'P'B' = \alpha + \Delta\alpha$, $\angle (PC, P'C') = \Delta\phi_c$, $\angle(PB, P'B') = \Delta\phi_b$, dan is

$$\alpha + \Delta\alpha + \Delta\phi_b = \alpha + \Delta\phi_c,$$

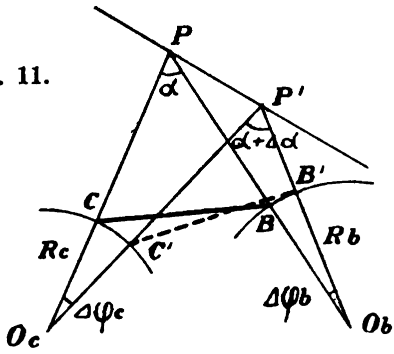
of

$$\Delta\alpha = \Delta\phi_c - \Delta\phi_b,$$

of

$$\text{Lim}\,\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \text{Lim}\,\frac{\Delta\phi_c}{\Delta t} - \text{Lim}\,\frac{\Delta\phi_b}{\Delta t}.$$

Fig. 11.



PC en P′C′ snijden elkander in een punt O_c, dat bij de limiet krommtemiddelpunt wordt van de baan van C. Noemt men $O_cC = R_c$, en evenzoo $O_bB = R_b$, dan is

$$R_c \text{Lim}\,\frac{\Delta\phi_c}{\Delta t} = \text{Lim}\,\frac{\Delta s_c}{\Delta t},$$

$$R_b \text{Lim}\,\frac{\Delta\phi_b}{\Delta t} = \text{Lim}\,\frac{\Delta s_b}{\Delta t},$$

als $s_c = CC'$ en $s_b = BB'$.

Hieruit volgt:

$$\text{Lim}\,\frac{\Delta\phi_c}{\Delta t} = \frac{v_c}{R_c},\quad \text{Lim}\,\frac{\Delta\phi_b}{\Delta t} = \frac{v_b}{R_b},$$

en dus is

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{v_c}{R_c} - \frac{v_b}{R_b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Met behulp van deze formule zijn gemakkelijk eenige bekende en nieuwe betrekkingen af te leiden.

17. Bij draaiing om een vast punt is α constant, dus:

$$\frac{v_c}{R_c} = \frac{v_b}{R_b}.$$

Wanneer de beweging zoodanig is, dat de omgeschreven cirkels der driehoeken BPC, B'P'C' even groot zijn, dan is ook

$$\angle BPC = \angle B'P'C', \text{ en dus } \frac{v_c}{R_c} = \frac{v_b}{R_b}.$$

Dit is steeds het geval, wanneer de rollende poolbaan een cirkel is, die door B en C gaat, en tijdelijk wanneer de poolbanen eenzelfden osculatiecirkel bezitten door B en C gaande.

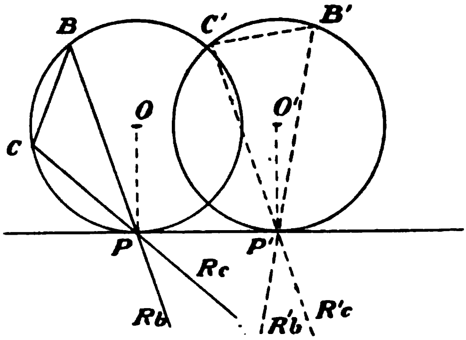
Men neme bijv. (fig. 12) een cirkel OPBC, die over een rechte lijn PP' rolt. Voor punten B en C van dien cirkel geldt dus

$$\frac{v_c}{R_c} = \frac{v_b}{R_b}.$$

B en C beschrijven gelijke cycloïden, waarvan twee overeenkomstige punten een afstand = koorde BC bezitten.

Laat men dus den cirkel eèn afstand PP' = boog BC verder rollen, dan komt CB in C'B', en de kromtestraal R'_c in C' van

Fig. 12.



de door C beschreven cycloïde is gelijk en evenwijdig aan de kromtestraal R_b in B van de door B beschreven kromme. Dus is ook

$$\frac{v_c}{R_c} = \frac{v'_c}{R'_c},$$

d. w. z. de kromtestralen van de cycloïde zijn evenredig met de poolstralen. Deze eigenschap geldt voor elken vorm van de vaste poolbaan, waarbij alle punten van den rollenden

cirkel gelijke krommen doorloopen, *dus voor alle cycloïdale lijnen.*

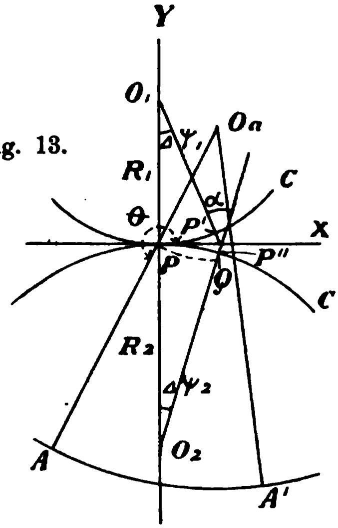


Fig. 13.

Zijn de beide poolbanen van willekeurigen vorm, doch hebben ze een aanraking van hoogere orde, dan geldt de eigenschap voor de daarbij verkregen cycloïdale boogjes.

18. Zijn (fig. 13) C de vaste, C′ de bewegende poolbaan, P de pool ten tijde t, P′ ten tijde $t + \Delta t$, P″ het punt van C′ dat met P′ komt samen te vallen, R_1 en R_2 de kromtestralen, O_1 en O_2 kromtemiddelpunten van de poolbanen, dan is:

$$\text{Lim}\, \Delta\, \alpha = \text{Lim}\, \Delta\psi_1 + \text{Lim}\, \psi_2 = \text{Lim}\, \frac{PP'}{R_1} + \text{Lim}\, \frac{PP''}{-R_2},$$

of omdat

$$\text{Lim}\, \frac{PP'}{\Delta t} = \text{Lim}\, \frac{PP''}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = V = \text{de snelheid}$$

waarmede zich de pool verplaatst, en $\frac{d\alpha}{dt}$ = de hoeksnelheid van de draaiïng om $P = \omega$:

$$\omega = V\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = -\frac{V}{J}.$$

Voor het geval van fig. 14 is

$$\text{Lim}\, \Delta\alpha = \text{Lim}\, \Delta\psi_2 - \text{Lim}\, \Delta\psi_1,$$

of

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{ds}{dt}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right).$$

Omdat de rolling plaats heeft van de y-as naar de x-as, is $\frac{d\alpha}{dt} = -\omega$, en dus

$$\omega = V\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

evenals boven.

Wanneer in fig. 14 de krommen C en C′ van rol verwisselen, dan is

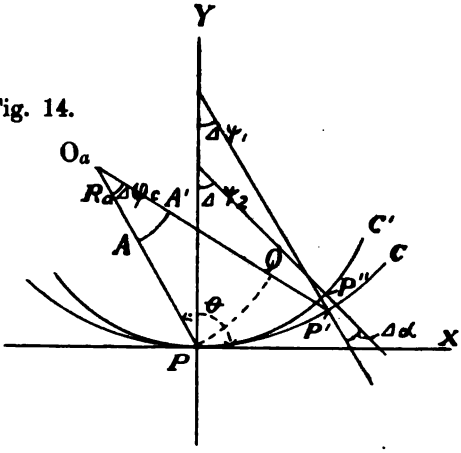
$$\frac{d\alpha}{dt} = + \omega;$$

als men tevens R_1 en R_2, O_1 en O_2 verwisselt, blijft de formule

$$\omega = V\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

19. Zijn A (fig. 13) een bewegend punt ten tijde t, A′ de stand daarvan ten tijde $t + \Delta t$, O_a het snijpunt van

Fig. 14.



AP en A′P″, en dus bij de limiet kromtemiddelpunt van de baan van A, $PA = - r_1$, $PO_a = r_2$, $\angle x PA = \theta$, dan is als men uit O_a de cirkels PQ en AA′ trekt:

$$PQ = PP'' \cos \angle P''PQ = ds \cos (270^\circ \quad \theta) = ds \times \sin \theta,$$

$$AA' = ds_c = \frac{PQ}{O_aP} \times O_aA = \frac{- ds \times \sin \theta}{r_2} (- r_1 + r_2).$$

Maar ook is $ds_c = PA \times \omega = - r_1 \times ds \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$, en dus

$$\frac{-ds \times \sin\theta}{r_2}(-r_1 + r_2) = -r_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \sin\theta\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right). \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (2)$$

Voor het geval van fig. 14 is $PA = + r_1$, $PO_a = + r_2$, en

$$ds_t = \frac{PQ}{O_aP} \cdot O_aC = PC \cdot \omega,$$

$$PQ = PP' \cos \angle P'PQ = ds \cos(\theta - 90^\circ) = ds \sin\theta,$$

dus

$$\frac{ds \sin\theta}{r_2} \cdot (r_2 - r_1) = ds \cdot r_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right),$$

zoodat eveneens

$$\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} = \sin\theta\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right).$$

Wanneer C en C′ van rol verwisselen, dan verandert ω van teeken, en verwisselen R_1 en R_2 onderling, zoodat ook dan de formule denzelfden vorm behoudt.

20. De middellijn J van den in N°. 13 genoemden cirkel, — de meetkundige plaats van de punten, die slechts tangentiëele versnelling bezitten, en die zich dus in buigpunten van hun baan bevinden — voldoet aan de reeds gebruikte voorwaarde

$$-\frac{1}{J} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}.$$

In fig. 13 valt dus die buigpuntencirkel naar de zijde van de negatieve y-as; in fig. 14, als C vast is, naar de positieve en als C′ vast is, naar de negatieve zijde van de y-as.

D. w. z. die cirkel ligt met de vaste poolbaan aan dezelfde zijde van de gemeenschappelijke raaklijn bij de hypocycloïdale beweging, en aan de andere zijde bij de epi- en pericyloïdale.

Omdat $J = -\frac{V}{\omega}$, is de snelheid van $J = -V =$ de negatieve snelheid van P; de pool beweegt zich dus alsof J pool was.

21. Schrijft men formule (2) in den vorm:

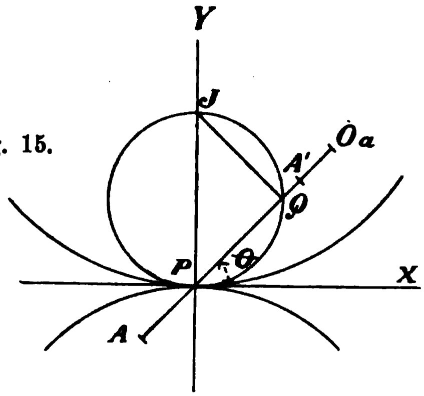
$$\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} = -\frac{1}{J \sin \theta},$$

dan blijkt (fig. 15) dat $\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} = \frac{1}{PQ}$, als PQ koorde is van den buigpuntencirkel.

Wanneer men r_2 en r_1 verwisselt, dan kan de formule den vorm $\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} = -\frac{1}{J \sin \theta}$ blijven behouden, mits ook J van teeken verandert, d. w. z. als R_1 en R_2 worden omgewisseld.

Daaruit volgt, dat als O_a kromtemiddelpunt is van de baan

Fig. 15.



van A, ook A kromtemiddelpunt zal zijn van de baan van O_a, *wanneer de poolbanen van rol verwisselen.*

Maakt men $PA' = 2PA$, dan is

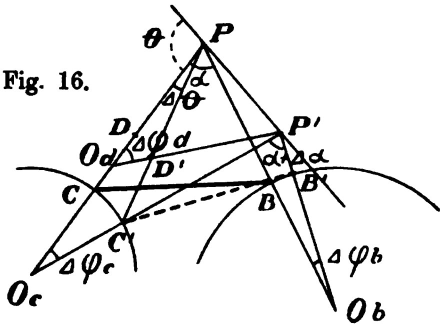
$$\frac{1}{PO_a} + \frac{1}{J \sin \theta} = \frac{2}{PA'}, \text{ of}$$

$$\frac{1}{PO_a} + \frac{1}{PQ} = \frac{2}{PA'},$$

zoodat P, Q, A′ en O_a harmonische punten zijn, wat tot een constructie leidt voor O_a als A gegeven is.

22. Beschouwt men (fig. 16) in twee achtereenvolgende

Fig. 16.



standen twee punten C en D op eenzelfde lijn door P gelegen, dan is $\angle D'P'B' = \alpha + \Delta'\alpha$, en

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{v_c}{R_c} - \frac{v_b}{R_b}, \quad \frac{d\alpha'}{dt} = \frac{v_d}{R_d} - \frac{v_b}{R_b}.$$

Omdat $C'D' = CD$, is

$$P'C' \cos \Delta\phi_c = P'D' \cos \Delta\phi_d + CD \cos \Delta\theta,$$

en

$$P'C' \sin \Delta\phi_c = P'D' \sin \Delta\phi_d - CD \sin \Delta\theta,$$

zoodat

$$(PC + \Delta PC) \frac{v_c}{R_c} = (PD + \Delta PD) \frac{v_d}{R_d} - CD \frac{d\theta}{dt},$$

of

$$PC \frac{v_c}{R_c} = PD \frac{v_d}{R_d} - CD \frac{d\theta}{dt},$$

of

$$PC \times \omega \frac{v_c}{R_c} = PD \times \omega \times \frac{v_d}{R_d} - CD \times \omega \times \frac{d\theta}{dt},$$

of $\left(\text{met } \frac{d\theta}{dt} = \omega\right)$:

$$\frac{v_c^2}{R_c} = \frac{v_d^2}{R_d} - \frac{v_{d-c}^2}{CD},$$

waardoor de betrekking tusschen de normale versnellingen verkregen is, die in fig. 10 meetkundig gevonden werd, en met

behulp waarvan men den kromtestraal R_d kan vinden, als R_e bekend is.

23. Als (fig. 13) P′ in P″ komt, dan is

$$\text{Lim } P'P'' = \text{Lim } PP' \times \angle P'PP'',$$

of

$$\text{Lim } \tfrac{1}{2} \text{ versnelling van den pool} \times (\Delta t)^2 = \text{Lim } V\Delta t \times \text{Lim } \tfrac{1}{2}(\Delta\psi_1 + \Delta\psi_2),$$

dus

$$\text{versnelling} = V\omega.$$

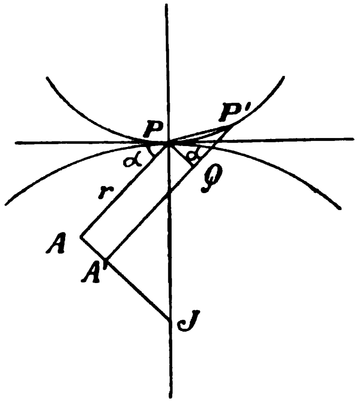
De hoekversnelling van het geheele stelsel is $\frac{d\omega}{dt}$, en dus zal de pool, om een versnelling $V\omega$ te verkrijgen, gedacht moeten worden te draaien om een punt, gelegen op de gemeenschappelijke raaklijn van de poolbanen, op een afstand

$$\frac{V\omega}{\frac{d\omega}{dt}} \text{ van den pool.}$$

Blijkbaar is dit het punt S, het uiteinde van de middellijn van den in fig. 9 (N°. 13) aangegeven cirkel PS.

24. Het bestaan van den buigpuntencirkel kan als volgt worden aangetoond (fig. 17).

Fig. 17.



Als A zich verplaatst naar A′, dan is de kromtestraal van de

door A beschreven kromme oneindig groot, als de snelheid van A′ dezelfde richting heeft als die van A, dus als P′A′//PA is.

Nu is

$$AA' = AP \times \omega\Delta t,$$

en

$$AA' = PQ,$$

als PQ loodrecht op A′P′ is getrokken, dus

$$AA' = PP' \sin\alpha,$$

$$= V\Delta t \times \sin\alpha.$$

Bijgevolg

$$AP \times \omega\Delta t = V\Delta t \times \sin\alpha,$$

$$AP = \frac{V}{\omega} \sin\alpha,$$

$$= J \sin\alpha,$$

zoodat A moet liggen op den cirkel met PJ als middellijn.

25. Het bestaan van den normalencirkel van Bresse is aangetoond in een voordracht: „Opmerkingen omtrent bewegingsleer en theorie der oppervlakken", 9e Ned. Nat. en Gen. Congres.

26. De vraag kan gesteld worden, of de versnellingspool O kan samenvallen met den snelheidspool P. Daar O bepaald wordt als snijpunt van de in N°. 13 vermelde cirkels, zal dan een van die beide cirkels een straal nul moeten hebben, en dus zal òf J, òf $\frac{V\omega}{\frac{d\omega}{dt}}$ nul moeten zijn.

$J = 0$ vereischt $R_2 = 0$, d. w. z. dat de rollende poolbaan een keerpunt bezit.

Omdat $\omega = -\frac{V}{J}$, zal dan ook $V = 0$ moeten zijn; dit is

noodig, omdat de pool op de vaste poolbaan gaat teruglooopen. De straal van den anderen cirkel is dan ook nul, tenzij $\frac{d\omega}{dt} = 0$ mocht zijn. $\frac{V\omega}{\frac{d\omega}{dt}} = 0$ vereischt $V = 0$, en dus ook — als J eindig is —, $\omega = 0$, omdat $\frac{d\omega}{dt} = \infty$ is uitgesloten.

Dit zou stilstand van het stelsel beteekenen; bij het beginnen en eindigen van de beweging van een materieel stelsel doet zich dit voor. Is echter $J = \infty$, dan kan $\omega = 0$ zijn, zonder dat $V = 0$ behoeft te zijn; dit is het geval, als de poolbanen een gemeenschappelijk buigpunt bezitten.

In elk der vermelde gevallen heeft de beweging plaats, alsof het stelsel om een vast punt draait.

SNELHEIDSASSEN,

DOOR

J. VAN DE GRIEND Jr.
(Kampen)

De volgende onderzoeking heeft een tweeledig doel. In de eerste plaats zal de snelheidstoestand eener gelijkvormig veranderlijke figuur voorgesteld worden door elementen van andere grootte dan bij haar voorstelling door middel van een enkel centrum van snelheden zou kunnen geschieden. Dit zal zijn nut kunnen hebben in gevallen, waarbij als onderdeelen eener veranderende figuur gelijkvormig veranderlijke figuren voorkomen (in constante verhouding verdeelde lijnen, constante hoeken), en uit de gegevens van het probleem zoodanige gewijzigde elementen voor de beweging van afzonderlijke punten op natuurlijke wijze volgen, terwijl de beweging van het gelijkvormige systeem in zijn geheel bezwaarlijker na te gaan is. — In de tweede plaats zullen de bewegingstoestanden van snijpunten van lijnen van twee onafhankelijk van elkander bewegende gelijkvormige systemen onderzocht worden. Dit zal zijn toepassing vinden als een punt, waarvan de beweging nagegaan moet worden, snijpunt is van twee rechten of krommen, wier beweging bekend is.

1. De beweging van de punten P eener rechte (P) (fig. 1) als gelijkvormig systeem is voor te stellen door het middelpunt van snelheden p_0 dezer beweging, de snelheid φ_0 van een punt op den afstand $= 1$ van p_0 (die wij de „*eenheidssnelheid*" zullen noemen) en den constanten hoek α_0, dien de richting der snelheid van P maakt met den voerstraal p_0P (den „*systeemhoek*"). Dezelfde beweging der punten P is evenwel ook voor te stellen door iedere andere eenheidssnelheid en iederen anderen systeemhoek, wanneer men afziet van het voor alle punten P geldende snelheidscentrum p_0 en dit punt vervangt door een rechte,

waarvan de opeenvolgende punten elk in het bijzonder als snelheidscentrum voor een enkel der opeenvolgende punten P dienen. Kiest men n l. den willekeurigen systeemhoek α en de willekeurige eenheidssnelheid ϕ, dan is daardoor het snelheidscentrum p_1, waarbij het willekeurig aangenomen systeempunt P_1 dezelfde beweging aanneemt als bij de beweging om p_0, bepaald: het is zoo gelegen, dat $\angle p_0 P_1 p_1 = \alpha_0 - \alpha$ en $p_0 P_1 : p_1 P_1 = \phi : \phi_0$. Herhaalt men dezelfde constructie voor alle punten P der rechte (P), dan blijkt, dat de punten $p_1, p_2, \ldots$ verkregen worden bij de beweging van een gelijkvormig met zich zelf blijvenden driehoek $p_0 P_1 p_1$, waarvan het eene hoekpunt in p_0 blijft en het hoekpunt P_1 de rechte (P) doorloopt; het derde hoekpunt p_1 doorloopt dan de meetkundige plaats der snelheidscentra. Gelijk uit de meetkunde bekend, is dit een rechte (p), die met (P) een hoek maakt $\delta = \angle P_1 p_0 p_1$ (zoodat P_1, p_1, p_0 en het snijpunt O van (P) en (p) op een cirkel liggen), en waarop de punten p een reeks vormen, gelijkvormig met de reeks punten P op (P). Wij willen de rechten (p) de *„snelheidsassen"* van (P) noemen; de verhouding der snelheden, waarmee de snelheidsas (p) en de rechte (P) door de punten p en P doorloopen worden, $\varepsilon = p_1 p_2 : P_1 P_2 = p_0 p_1 : p_0 P_1$ de *„cursaalverhouding"*. De gegevens voor de beweging van het gelijkvormige systeem zijn dan vervangen door de snelheidsas (c), de cursaalverhouding ε, de eenheidssnelheid ϕ, den systeemhoek α en een paar overeenkomstige punten P, p. Of ook door twee paar overeenkomstige punten P_1, p_1; P_2, p_2 met weglating der cursaalverhouding. Systeemhoek, eenheidssnelheid en cursaalverhouding noemen wij de *elementen* der beweging langs de beschouwde snelheidsas.

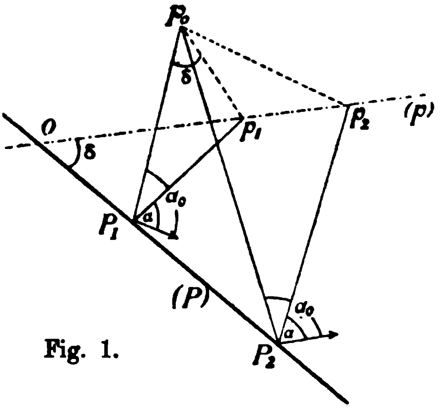


Fig. 1.

Kent men richting en grootte van de snelheid van twee punten der rechte (P), uitgedrukt in eenzelfde eenheidssnelheid en eenzelfden systeemhoek, dan is de snelheidsas met alle

noodige gegevens, dus ook de beweging der geheele rechte als gelijkvormig systeem, bepaald; evenredige verdeeling van de snelheidsas tusschen de twee bekende op haar gelegen snelheidscentra en van de rechte (P) tusschen de twee correspondeerende punten, geeft de reeks snelheidscentra van de overige punten der rechte (p).

In het bijzonder kan door deze methode iedere gelijkvormige beweging vervangen worden door een reeks rotaties ($\alpha = 90°$).

2. Gegeven de gelijkvormige beweging van een rechte (P) (fig. 2) door een snelheidsas (p) met de bijbehoorende elementen ϕ, α, ε en een paar overeenkomstige punten P_1 en p_1. Gevraagd bij willekeurige andere gegevens ϕ' en α' de bijbehoorende snelheidsas (p') met de cursaalverhouding ε' te bepalen.

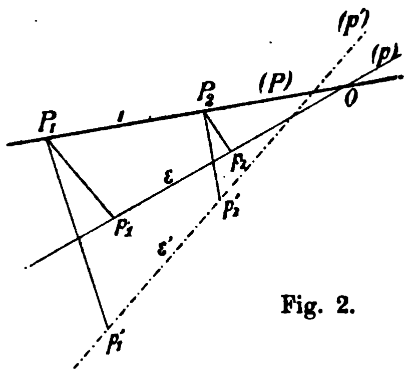


Fig. 2.

Oplossing. Maak $\angle p_1P_1p'_1 = \alpha - \alpha'$ en $p_1P_1 : p'_1P_1 = \phi' : \phi$, dan is p'_1 het snelheidscentrum van P_1 bij de gegevens (ϕ', α'). Neem $P_1P_2 = 1$ en $p_1p_2 = \varepsilon$, dan zijn P_2 en p_2 weer bijeenbehoorende punten. Herhaal voor deze de eerste constructie, waardoor p'_2 als nieuw snelheidscentrum van P_2 gevonden wordt. Verbind p'_1 met p'_2, dan is $p'_1p'_2$ de gevraagde snelheidsas en $p'_1p'_2 = \varepsilon'$ de gevraagde cursaalverhouding.

In plaats van het punt P_2 kan men ook het oneindig verre punt P_∞ van (P) kiezen en de stukken 1 en ε van uit O op (P) en (p) afzetten; dan vindt men uit dit enkele punt P_∞ de richting van (p') met de cursaalverhouding ε'; de rechte (p') zelf volgt dan uit het eerst bepaalde punt p'_1.

Omgekeerd overtuigt men zich gemakkelijk (door gebruikmaking van het oneindig verre punt P_∞), dat iedere willekeurige rechte als snelheidsas te beschouwen is, waarbij de gegevens ϕ', α' en ε' bepaald kunnen worden.

Beide constructies kunnen ook geschieden door middel van het snelheidscentrum p_0 der geheele rechte, te bepalen volgens de opmerkingen in 1.

systeemhoek α maakt, dan mag in het algemeen voor p_1 elk ander punt p''_1 genomen worden, mits de bijbehoorende eenheidssnelheid omgekeerd evenredig zij met den afstand van dat punt van P_1S. Want stelt men het tegengestelde der beweging om p''_1 samen met de beweging om p_1, dan krijgt men een resulteerende beweging om een punt S van P_1S, d. i. een beweging, die een verschuiving van het punt P_1 in de rechte (P) zelf vertegenwoordigt.

4. Wanneer het gelijkvormig bewegende systeem bestaat uit meer rechten (P),..., zullen de snelheidsassen (p),..., dezer rechten bij dezelfde elementen ϕ, α, ϵ een figuur vormen, gelijkvormig met de figuur gevormd door (P),.... Want de verhouding der zijden van beide figuren is constant $= \epsilon$, en de hoeken der rechten (p) met (P) zijn constant $= \delta$ (1), den standvastigen hoek van den gelijkvormig met zich zelf blijvenden driehoek $p_0 P_1 p_1$ (fig. 1). Tevens volgt daaruit, dat van de beide gelijkvormige figuren het snelheidscentrum p_0 van de geheele beweging van het systeem het gelijkvormigheidspunt is. Wij willen de figuur, gevormd door de rechten (p) de *„snelheidsfiguur"* van die, gevormd door de rechten (P), noemen. Iedere veelhoek, die uit den bewegenden veelhoek met een vast punt (het snelheidscentrum) als gelijkvormigheidspunt is af te leiden, kan als snelheidsfiguur van den bewegenden veelhoek beschouwd worden.

Als een der rechten (p) de overeenkomstige (P) snijdt in haar contactpunt, en dit contactpunt niet zijn eigen snelheidscentrum is, snijden ook de andere rechten (p) de overeenkomstige (P) in haar contactpunten. Want dan moet de hoek δ bij de eerste rechte (p), dus ook bij alle volgende, gelijk zijn aan den systeemhoek α. Voor iederen willekeurig aangenomen systeemhoek α is er dus een snelheidsveelhoek, wiens zijden den bewegenden veelhoek in de contactpunten van al zijn zijden snijden. Voor $\alpha = 90°$ (reeks rotaties) heeft de snijding onder rechte hoeken plaats.

Door een kromme lijn te doen ontstaan als limiet eener gebrokene, vindt men verder, dat ook van een kromme de snelheidsfiguur gelijkvormig is met de bewegende figuur in een verhouding $=$ de cursaalverhouding ϵ; de raaklijnen der snelheidsfiguur zijn de snelheidsassen van de raaklijnen in de

3. Gegeven twee punten P_1 en P_2 der rechte (P) (fig. 3) [1]) en de correspondeerende punten p_1 en p_2 der snelheidsas (p) met den systeemhoek α. Gevraagd het contactpunt der rechte (P) [2]).

Oplossing. Daar het contactpunt van (P) alleen afhangt van de beweging der rechte (P) als geheel, niet van die harer afzonderlijke punten, kunnen wij in de beweging harer punten zoodanige wijzigingen aanbrengen, dat daardoor de beweging der rechte als geheel niet gestoord wordt: d. w. z. wij kunnen bewegingen der punten langs (P) naar willekeur bijvoegen of weglaten. Zoodanige bewegingstoevoegingen correspondeeren met het verplaatsen van een der snelheidscentra, bijv. p_1 langs een rechte $p_1p'_1$, die met (P) den systeemhoek α maakt. Daardoor worden alle punten der oude snelheidsas (p) in dezelfde richting naar de nieuwe snelheidsas p'_1p_2 (waarbij het snelheidscentrum p_2 hetzelfde gebleven is) verschoven. Kiest men het punt p'_1 zoo, dat $P_1p'_1 \,//\, P_2p_2$, dan zijn alle verbindingslijnen Pp voor de nieuwe snelheidsas (p') evenwijdig; daaruit volgt, dat het snijpunt X der nieuwe as (p') met (P) zijn eigen snelheidscentrum en dus het gezochte contactpunt is.

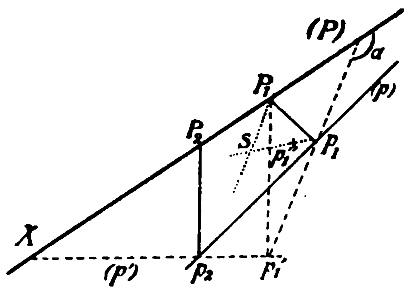


Fig. 3.

De constructie is dus: Trek uit p_1 een rechte $p_1p'_1$, die met (P) den systeemhoek α maakt, en uit P_1 een rechte $//\, P_2p_2$; verbind het snijpunt p'_1 dezer rechten met p_2; de rechte p'_1p_2 bepaalt op (P) het contactpunt X.

Opmerking. Bij verandering der eenheidssnelheid ϕ, terwijl de systeemhoek α dezelfde blijft (waardoor dus de snelheidscentra van alle punten der rechte veranderen) zijn, waar het alleen de beweging der rechte als geheel en niet die harer punten betreft, ook andere verplaatsingen van p_1 geoorloofd. Trekt men door P_1 de rechte P_1S, die met (P) den

[1]) In deze en de volgende figuren zijn de constructielijnen gestreept, de lijnen voor de beredeneering gestipt aangegeven.

[2]) Snijpunt van (P) met haar volgenden stand

overeenkomstige punten der bewegende figuur. Bij elken systeemhoek is er een snelheidsfiguur, wier raaklijnen de raaklijnen der bewegende figuur in haar contactpunten snijden; de raaklijnen dezer snelheidsfiguur, die de bewegende kromme zelf in overeenkomstige punten snijden, bepalen de contactpunten der bewegende figuur.

In het bijzonder kan men spreken van den snelheidscirkel van een bewegenden cirkel. De cursaalverhouding is gelijk aan de verhouding der stralen. Het middelpunt van den snelheidscirkel is het snelheidscentrum van het middelpunt van den bewegenden cirkel.

5. Voeren twee gelijkvormige systemen onafhankelijk van elkaar bewegingen uit (elke gegoven hetzij door een enkel snelheidscentrum, hetzij door een snelheidsfiguur), dan kan gevraagd worden naar de beweging van het snijpunt van een rechte of kromme van het eene systeem met een rechte of kromme van het andere systeem. In de volgende No's (6—9) zal de richting en grootte van de snelheid dier beweging worden afgeleid voor het snijpunt van twee rechten (krommen zijn te vervangen door de raaklijnen in het snijpunt); daarbij correspondeert met dit snijpunt als punt van de rechte van het eene systeem een snelheidscentrum (punt der snelheidsas), en eveneens als punt van de rechte van het andere systeem; het is dan de vraag, het snelheidscentrum van het snijpunt uit die beide snelheidscentra af te leiden. Het antwoord kan op twee wijzen gegeven worden: uitgedrukt in de elementen langs de eene of langs de andere snelheidsas. De afleiding zal geschieden eerst voor een systeemhoek van 90° (reeks rotaties), daarna voor een willekeurigen systeemhoek, en wel voor beide eerst voor het geval, dat een der rechten onbeweeglijk is, daarna dat beide bewegen.

6. Gevraagd het snelheidscentrum van het snijpunt S (fig. 4) van een bewegende rechte (P) met een vaste rechte (A), als het snelheidscentrum s' van het punt S als punt der rechte (P) bij gegeven rotatiesnelheid ϕ gegeven is.

O p l o s s i n g. Trek door S $Ss \perp$ (A) en door $s'L \perp$ (P); het snijpunt s is het verlangde punt.

Het bewijs volgt uit de gelijkvormigheid der driehoeken

SS′S″ en $s'Ss$, waarbij SS′ ⊥ s'S de verplaatsing van het systeempunt S voorstelt, S′S″ // (P) en dus SS″ de verplaatsing van het snijpunt S is.

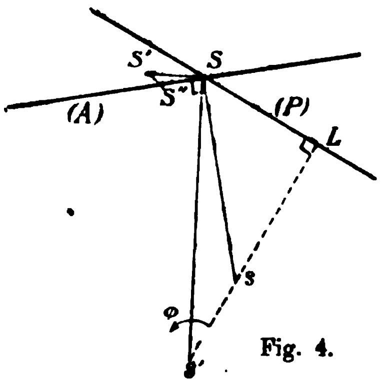


Fig. 4.

Bij verplaatsing van s' langs de loodlijn s'L verandert s, dus de beweging van het snijpunt, niet. Dit is ook op zich zelf duidelijk, omdat deze verplaatsing hier, waar het alleen de beweging der rechte (P) als geheel betreft, geoorloofd is (3).

7. Gevraagd het snelheidscentrum van het snijpunt S (fig. 5) van twee bewegende rechten (P′) en (P″), als het snelheidscentrum van S als punt van (P′) ligt in s' (rotatiesnelheid ϕ') en van S als punt van (P″) in s'' (rotatiesnelheid ϕ'').

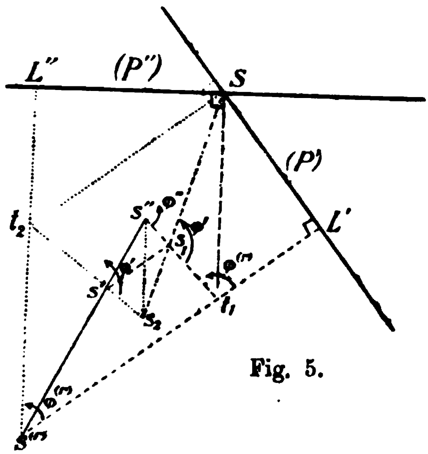


Fig. 5.

Oplossing. Geef aan beide systemen (P′) en (P″) een rotatiesnelheid — ϕ'' om s''; het punt S van (P″) komt in rust, het punt S van (P′) krijgt een rotatiesnelheid $\phi^{(r)} = \phi' - \phi''$ bijv. om $s^{(r)}$, op de rechte $s's''$. Men kan nu de constructie van 6 toepassen en vindt door $s^{(r)}$L′ ⊥ (P′) en St_1 ⊥ (P″) te trekken het snelheidscentrum t_1 van het snijpunt S met de rotatiesnelheid $\phi' - \phi''$. Geef nu het geheel de rotatie ϕ'' om s'' terug; resultante voor de beweging van S is een rotatie ϕ' om het gevraagde punt s_1, waarbij $s's_1$ // $s^{(r)}t_1$.

Soortgelijk, met een ander snelheidscentrum s_2 (rotatie ϕ'') tot uitkomst, door van (P″) uit te gaan en (P′) tot rust te brengen.

Opmerking. Zijn de rotaties ϕ' en ϕ'' gelijk, dan valt $s^{(r)}$ in het oneindige en de constructie gaat niet door. Verplaatst

men echter in dat geval s' en s'' over de loodlijnen resp. op (P′) en (P″) tot in het snijpunt dezer loodlijnen (3), dan stelt dit snijpunt zoowel het snelheidscentrum van het punt S van (P′) als van (P″) voor en is dus het snelheidscentrum van het snijpunt. In dat geval vereenvoudigt zich dus de constructie tot het bepalen van het snijpunt dezer loodlijnen.

8. Gevraagd het snelheidscentrum s van het snijpunt S (fig. 6) van een bewegende rechte (P) met een vaste rechte (A), als het snelheidscentrum s' van het punt S van (P) bij gegeven eenheidssnelheid ϕ en gegeven systeemhoek α gegeven is.

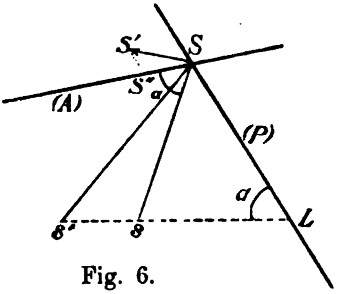


Fig. 6.

Oplossing. Trek door s' de rechte s'L, die met (P) den systeemhoek α maakt, en door S een rechte, die met (A) den systeemhoek α maakt; het snijpunt is s. — Bewijs als in 6 door de gelijkvormigheid der driehoeken s'Ss en S′SS″; gelijke opmerking omtrent het verplaatsen van s' over een rechte s'L, die met (P) den systeemhoek α maakt.

9. Gevraagd het snelheidscentrum van het snijpunt S (fig. 7) van twee bewegende rechten (P′) en (P″), als het snelheidscentrum van S als punt van (P′) ligt in s' (eenheidssnelheid ϕ', systeemhoek α'), en van S als punt van P″ in s'' (eenheidssnelheid ϕ'', systeemhoek α'').

Oplossing. Geef aan beide systemen een beweging tegengesteld aan die om s'' (elementen $-\phi''$ en α'', of ϕ'' en $\pi + \alpha''$); het punt S van (P″) is dan in rust, het punt S van (P′) krijgt een beweging bijv. met $s^{(r)}$ als snelheidscentrum en ϕ_r en α_r als elementen, op bekende wijze uit de bewegingen (ϕ', α') om s' en ($-\phi''$, α'') om s'' samen te stellen ($\angle s' s^{(r)} s'' = 2\pi - \alpha' - \alpha''$). Nu is de constructie van 8 toe te passen, en geeft, als men $s^{(r)}L_1$ onder den hoek α_r met (P′) en St_1 onder denzelfden hoek met (P″) trekt, het punt t_1 als snelheidscentrum voor S (elementen ϕ_r, α_r). Geef nu het geheel de beweging om s'' terug; resultante voor de be-

weging van S is die met de elementen ϕ', α' om s_1, waarbij $\Delta\, s'' t_1 s_1 \infty \Delta\, s'' s^{(r)} s'$, omdat de samenstelling der bewegingen (ϕ', α') om s' en $(-\phi'', \alpha'')$ om s'' tot (ϕ_r, α_r) om $s^{(r)}$ geheel

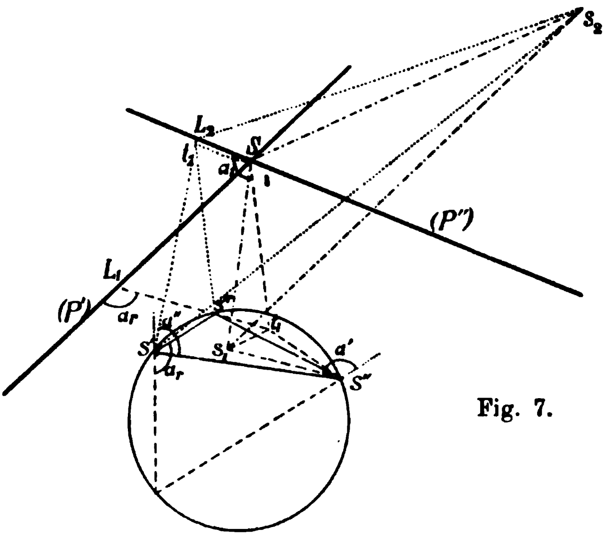


Fig. 7.

aequivalent is met die van (ϕ_r, α_r) om t_1 en (ϕ'', α'') om s'' tot (ϕ', α') om s_1.

Soortgelijk door het systeem (P') tot rust te brengen; het punt $s^{(r)}$ (elementen $-\phi_r, \alpha_r$) blijft hetzelfde, in plaats van t_1 vindt men t_2, in plaats van s_1 s_2 (elementen ϕ'', α''). Daar de laatstgenoemde beweging van het snijpunt S om s_2 aequivalent moet zijn met de eerst gevondene om s_1, moet $s_1 S : s_2 S = \phi'' : \phi'$ en $\angle s_1 S s_2 = 2\pi - \alpha' - \alpha''$, d. i. $\Delta\, s_1 S s_2 \infty \Delta\, s' s^{(r)} s''$ [1]).

Wanneer de bewegingen om s' en s'' gelijk zijn ($\phi'' = \phi'$, $\alpha'' = \alpha'$) vindt men door overeenkomstige redeneering als in het overeenkomstige geval in 7 (Opm.), dat het snelheidscentrum s van het snijpunt S (waarin s_1 en s_2 zijn samen-

[1]) En daar verder $t_1 s^{(r)} t_2 S$ een parallelogram is, volgt uit de fig. de meetkundige stelling:

Wanneer vier gelijkvormige driehoeken $s' s'' s^{(r)}$, $s' s_2 t_2$, $s_1 s_2 S$, $s_1 s'' t_1$ twee aan twee in cyclische volgorde dezelfde twee overeenkomstige hoekpunten s', s_2, s_1, s'' gemeen hebben, vormen de niet-gemeenschappelijke hoekpunten $s^{(r)}$, t_2, S, t_1 een parallelogram.

gevallen) geconstrueerd wordt als snijpunt van rechten uit s' en s'' onder den systeemhoek $\alpha' (= \alpha'')$ naar (P″) en (P) getrokken.

10. Beschouwt men een tweeden stand van het systeem, dan behoort bij een figuur van het systeem in dezen tweeden stand een nieuwe snelheidsfiguur (met dezelfde elementen ϕ, α), die gelijkvormig is met de eerste, omdat beide gelijkvormig zijn met de bewegende figuur. De snelheidsfiguur beweegt zich dus als een gelijkvormig systeem, d. w. z. haar snelheidstoestand kan opnieuw vastgesteld worden door een snelheidsfiguur met dezelfde elementen ϕ, α. Wij noemen deze figuur de *„versnellingsfiguur"* der bewegende figuur, omdat uit haar de versnellingen van de systeempunten der eerste figuur zijn af te leiden. Eveneens heeft deze versnellingsfiguur een snelheidsfiguur, die wij ten opzichte van de eerste bewegende figuur de „versnellingsfiguur der tweede orde" kunnen noemen, enz.

Beschouwt men een enkel systeempunt P der bewegende figuur met de overeenstemmende punten in de snelheids- en versnellingsfiguren, dan kan gevraagd worden, het krommingsmiddelpunt der baan van P te bepalen, of algemeener, het contactpunt van een rechte, die met de raaklijn aan de baan van P een constanten hoek ω maakt (pool der logarithmische spiraal met den hoek ω tusschen raaklijn en voerstraal, die met de baan van P driepuntig contact heeft).

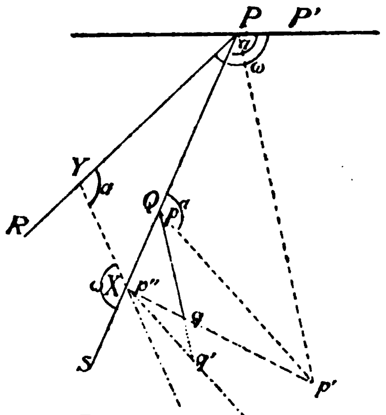


Fig. 8.

Zij p (fig. 8) het snelheidscentrum van P met den systeemhoek $\alpha = \angle p\text{PP}'$, zoodat PP′ de raaklijn der baan van P is; q het snelheidscentrum van Q (het bewegende punt p) met dezelfde elementen, en laat gevraagd zijn het contactpunt der rechte PR, die met PP′ den standvastigen hoek $\text{RPP}' = \omega$ maakt. — Daar de hoeken $p\text{PP}' = \alpha$ en $\text{RPP}' = \omega$, dus ook $\angle \text{RPQ} = \omega - \alpha$ bij de

beweging constant blijven, is het systeem QPR te beschouwen als een gelijkvormig systeem, waarvan de beweging bepaald is door de beweging der punten P (snelheidscentrum p) en Q (snelheidscentrum q). Na bepaling van het contactpunt X van QP (3) ($Pp' \,/\!/\, Qq$, $\angle p'pP = \alpha$), kan men de snelheidsas qp vervangen door $q'p''$ onder den hoek α met QP, waarbij dan p'' (X) het snelheidscentrum van P wordt en q' dat van Q (zoodat de systeemhoek α dezelfde blijft, maar de eenheidssnelheid $\frac{pP}{p''P} = \frac{qQ}{q'Q} \times$ zoo groot wordt). De snelheidsas van PR wordt dan (4) een rechte XY door X, die met PR den systeemhoek α, dus met XS den hoek ω maakt, en die op PR het verlangde contactpunt Y bepaalt.

Bij verandering van ω blijft het punt X standvastig; de meetkundige plaats van Y (van de polen der logarithmische spiralen, die driepuntig contact hebben met de baan PP′ van P) wordt een cirkel door P en X, die aan PP′ raakt. Wordt het krommingsmiddelpunt van de baan van P gevraagd, dan moet $\omega = 90°$ genomen worden; PR wordt een loodlijn op PP′, XY op XP.

11. *Samenstelling en ontbinding van bewegingen langs snel-*

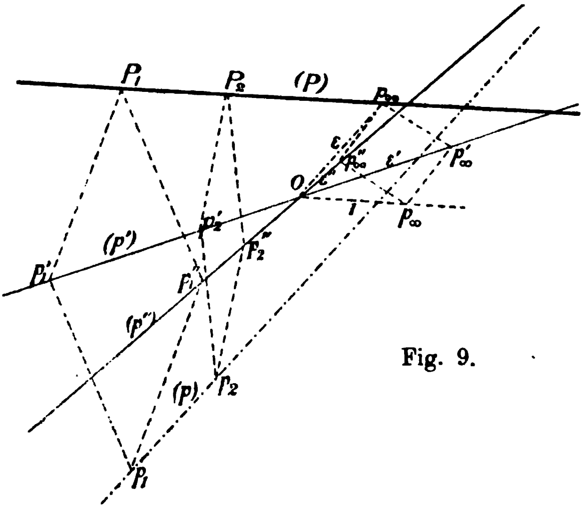


Fig. 9.

heidsassen. Voert een punt P_1 (fig. 9) tegelijk een beweging met p'_1 als snelheidscentrum en een met p''_1 als snelheidscentrum

uit, beide met dezelfde eenheidssnelheid ϕ en denzelfden systeemhoek α, dan ziet men gemakkelijk in, dat de resulteerende beweging met dezelfde elementen ϕ en α haar snelheidscentrum heeft in het vierde hoekpunt p_1 van het parallelogram $p'_1 P_1 p''_1 p_1$. Voeren de punten eener geheele rechte tegelijk twee gelijkvormige bewegingen uit, ieder gegeven door een snelheidsas ((p') en (p'')) met gelijke elementen ϕ en α, maar verschillende cursaalverhoudingen ε' en ε'', en herhaalt men de constructie voor een tweede punt P_2, dan vindt men door verbinding van p_1 en p_2 de resulteerende snelheidsas (p) met dezelfde elementen ϕ en α en de cursaalverhouding $\varepsilon = \frac{p_1 p_2}{P_1 P_2}$. Kiest men voor P_2 het oneindig verre punt van (P), dan vindt men richting en cursaalverhouding der resulteerende snelheidsas: Trek uit het snijpunt O van (p') en (p'') $OP_\infty = 1$ en // (P); neem $Op'_\infty = \varepsilon'$ langs (p') en $Op''_\infty = \varepsilon''$ langs (p''); voltooi het parallelogram $p'_\infty P_\infty p''_\infty p_\infty$; verbind p_∞ met O : $Op_\infty = \varepsilon$ stelt cursaalverhouding en richting der resulteerende as (p) voor.

Omgekeerd, wanneer gevraagd is een beweging langs een gegeven as (p) te ontbinden in twee langs willekeurig aangenomen assen (p') en (p''), voltooit men, als O het snijpunt van (p') en (p'') is, het parallelogram $P_1 O p_1 \ldots$ en projecteert het vierde hoekpunt evenwijdig aan (p') en (p'') op deze assen; de projecties zijn de gezochte snelheidscentra p'_1 en p''_1. Na deze constructie voor een tweede punt (eventueel P_∞) herhaald te hebben, kent men de cursaalverhoudingen ε' en ε''.

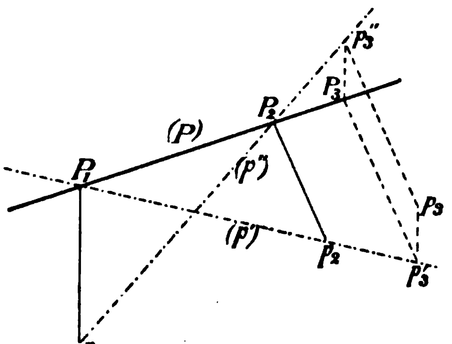


Fig. 10.

Wanneer in het bijzonder de beweging van een rechte (P) gegeven is door de snelheidscentra p_1 en p_2 van twee harer punten (fig. 10), en men ontbindt de beweging in twee andere langs de assen (p') en (p''), die ieder het eene systeempunt met het andere snelheidscentrum verbinden, dan zijn, omdat

de beweging bijv. van P_2 volgens de as $(p'') = 0$ en dus dit punt zijn eigen snelheidscentrum is, langs die as alle verbindingslijnen $Pp \mathbin{//} P_1 p_1$, en eveneens langs de andere as alle verbindingslijnen $\mathbin{//} P_2 p_2$. Het resulteerende snelheidscentrum p_3 van een willekeurig derde punt P_3 vindt men dus door het parallelogram $p'_3 P_3 p''_3 \ldots$ ($P_3 p'_3 \mathbin{//} P_2 p_2$, $P_3 p''_3 \mathbin{//} P_1 p_1$) te voltooien.

12. *Eerste toepassing.* De beweging van een veranderlijken cirkel (M) (fig. 11) is bepaald door de meetkundige plaats (C) der momentane gelijkvormigheidspunten [1]) C (snelheidscentra

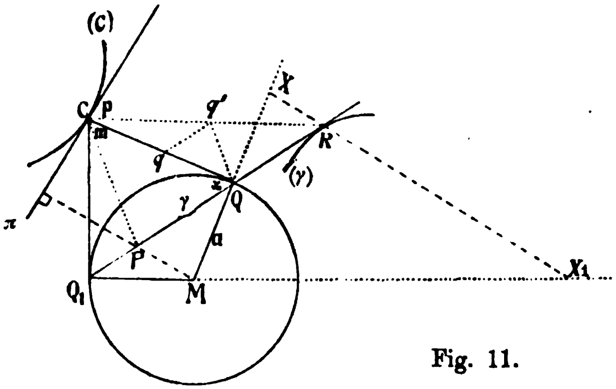


Fig. 11.

voor de beweging van den geheelen cirkel bij een systeemhoek $= 0$), door de enveloppe (γ) der poollijn γ van C ten opzichte van dezen cirkel, — beide gelegen in het onbeweeglijke vlak —, en door een stel overeenkomstige elementen: punt C van (C), raaklijn γ van (γ), en bijbehoorenden straal a van den cirkel. Gevraagd de krommingsmiddelpunten van de meetkundige plaatsen van de contactpunten Q, Q_1 van den cirkel, m. a. w. de krommingsmiddelpunten van de enveloppen van den cirkel.

Oplossing. In de eerste plaats toonen wij aan, dat door de gegevens de beweging volkomen bepaald is. — Blijkbaar is door de gegevens C, γ en a de stand van cirkel (M) te

---

[1]) Uitwendige gelijkvormigheidspunten van twee opeenvolgende standen van den cirkel.

bepalen. Laat men nu (M), met de poollijn (γ) en de daarop liggende pool P als systeemrechte en systeempunt, de elementaire beweging met C als snelheidscentrum uitvoeren, dan blijft de verplaatste poollijn γ' in den volgenden stand van den cirkel de contactkoorde ten opzichte van C, en de verplaatste pool P' de pool van π. Beweging van C langs de raaklijn π correspondeert dan met draaiïng van γ' om P'; deze draaiïng moet zoo groot genomen worden, dat γ' weer aan haar enveloppe (γ) raakt, d.i. de volgende poollijn γ'' is de raaklijn uit P' aan (γ). Daardoor is de verplaatsing van C langs (C), dus de grootte dezer verplaatsing in verhouding tot de gekozen elementairbeweging uit C, bepaald. Enz.

Om nu de krommingsmiddelpunten van de meetkundige plaatsen (Q) en (Q_1) der contactpunten Q en Q_1 te vinden, hebben wij de contactpunten der normalen MQ en MQ_1 dezer meetkundige plaatsen te zoeken. Het punt M beweegt zich als systeempunt met C als snelheidscentrum; de punten Q en Q_1 worden beschouwd als snijpunt van de rechten CQ (CQ_1) en RQ. Van CQ is het contactpunt Q; voor de beweging van Q kan dus CQ als een onbeweeglijke rechte beschouwd worden. De beweging van RQ is bepaald door die van R en P; R kan, als contactpunt van RQ, als onbeweeglijk punt beschouwd worden; P beweegt zich als punt van het systeem (M) (zie boven), snelheidscentrum C; RC is dus de snelheidsas voor RP; q' daarop het snelheidscentrum van Q ($Qq' \,//\, Pp$); q dus het snelheidscentrum van het snijpunt Q; als $q'q \,//\,$ RP (8). Op dese wijze is de beweging der rechte MQ door die van haar punten M en Q bepaald door haar snelheidsas mq. Daar de systeemhoek $= 0$ is, correspondeert het punt x (Q) dezer snelheidsas met het contactpunt X van MQ, dat dus zoo ligt, dat $mq : qx = \text{MQ} : \text{QX}$. Ter constructie van X merkt men op, dat $mq : qx = pq' : q'\text{R} = \text{PQ} : \text{QR}$, zoodat de punten X (en X_1) gevonden worden door uit R $XX_1 \,//\,$ MP, dus $\perp \pi$ te trekken.

13. *Tweede toepassing*. Raaklijn en krommingsstraal der cissoïde en krommingsstraal harer evolute. — Een rechthoekige driehoek PCR (fig. 12) beweegt zich zoo, dat de eene rechthoekszijde CR middellijn is van een gegeven cirkel (M) en de schuine zijde door een standvastig punt O van dezen cirkel

gaat. Gevraagd de meetkundige plaats van het derde hoekpunt P.

Oplossing. Men overtuigt zich gemakkelijk, dat de gezochte meetkundige plaats van P een cissoïde is met den

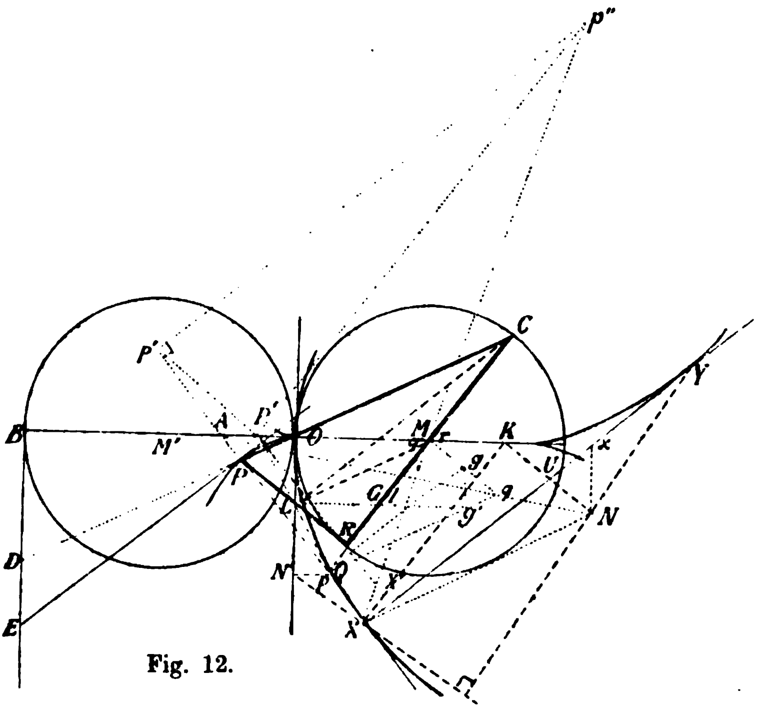


Fig. 12.

cirkel (M'), gelijk aan (M) en rakende in O, als voortbrengenden cirkel, en O als keerpunt. Nemen wij de hoeksnelheid van den om M wentelenden straal MR, dus ook van raaklijn RP, als eenheidssnelheid ($\alpha = 90°$), dan wordt het snelheidscentrum l van het snijpunt L van PR met de raaklijn in O gevonden (6) door $Ll \perp OL$ ($Ml \perp PR$). Daar steeds PL = LR (LM // PC), vormt PLR een gelijkvormig systeem, waarvan r (M) het snelheidscentrum van R, l dat van L, rl dus een snelheidsas en p het snelheidscentrum van P is, wanneer $lp = rl$. Alzoo is pP de normaal der cissoïde. Het punt p kan zonder l geconstrueerd worden, omdat $Ll = Ml = lp$ dus $Lp \perp ML$.

Om het krommingsmiddelpunt der cissoïde (contactpunt der normaal Pp) te vinden, moeten wij het snelheidscentrum van $Q(p)$ kennen (10); dit kan bepaald worden door Q te beschouwen als punt van het gelijkvormige systeem $MGQ(MG = GQ)$. G is snijpunt van LG met MG; daar LG een translatie heeft en $l(G)$ het snelheidscentrum is van L, kan men het snelheidscentrum g' van G als punt van LG vinden door $lg' = LG$ te nemen, van het snijpunt G dus (7 Opm.) door $g'g \perp LG$ en $Mg \perp MG$ te trekken; het snelheidscentrum van G is dan g, van Q dus q als $Mg = gq$. Daarbij is, zooals men gemakkelijk nagaat, $Qg \perp PQ$. — Nu wij dus het snelheidscentrum q van Q en p van P kennen, zouden wij volgens 3 het contactpunt X van PQ kunnen bepalen. Vooraf echter brengen wij nog eenige wijziging in de snelheidscentra van P en Q, om een meetkundige betrekking in de figuur aan te toonen. Het is nl. volgens de Opmerking in 3 geoorloofd het snelheidscentrum q van Q te verplaatsen naar M op gelijken afstand aan de andere zijde der loodlijn Qg op de bewegende rechte ($qg = gM$), mits men de eenheidssnelheid ϕ tegengesteld teeken geve; daarbij moet dan ook p naar p' ($pP = Pp'$) verplaatst worden. Past men nu de constructie van 3 toe, door p' naar p'' te verplaatsen ($p'p'' \perp PQ$, $Pp'' \,//\, QM$), dan vindt men door verbinding van p'' en M het contactpunt X. Snijdt Pp'' OB in P', dan is $PP' = P'O$, dus P' een punt der bissectrice LQ van $\angle RLN'$, dus $PP' = QR$. Alzoo is ook $p'P' \perp pp''$ en $\Delta p'p''P' \sim \Delta LCR$ (na verbinding van L met C, waarbij in den gelijkbeenigen driehoek CPp $CL \perp Pp$); dus, omdat $p'P' = 2LR$, $P'p'' = 2RC = 4RM$, dus ook $P'X' = 4RX'$ ($P'R \,//\, Pp$, omdat $PP' \# pR$, verlengd tot in X'), en door projectie uit M, $AX = 4QX$, $QX = \frac{1}{3}AQ$.

Daar volgens deze relatie het snelheidscentrum x van X, als punt van het gelijkvormig systeem AQX (bewegingen van A en Q bekend), eenvoudig te bepalen is, kunnen wij ook het krommingsmiddelpunt der evolute nog gemakkelijk constructief vinden. Ontbinden we ter bepaling van x volgens de laatste opmerking van 11 de beweging van AQ in twee andere langs de snelheidsassen Aq en Qa (a het niet-geconstrueerde snelheidscentrum van A, dat ergens in de loodlijn in A op OA ligt), dan ligt het componeerende snelheidscentrum van X op de eerste as in N, zoodat $XN \,//\, Qq$, terwijl de verbindingslijnen van

systeempunten en snelheidscentra bij de tweede as $\perp$ OA zijn; daaruit volgt (door Nx $\perp$ OA), dat x het gezochte snelheidscentrum is. Beschouwen wij het gelijkvormig systeem der rechten PX en Xx, wier hoek constant is, met bekend snelheidscentrum p van P en x van X, en verplaatst men p naar X (terwijl men de eenheidssnelheid $\frac{pP}{XP} \times$ zoo groot maakt) en x naar een correspondeerend punt Y, zoodat $\frac{pP}{XP} = \frac{xX}{YX}$, dan wordt de snelheidsas px van PX gewijzigd in XY en snijdt haar dus in haar contactpunt; alzoo snijdt ook de snelheidsas van Xx deze lijn in haar contactpunt (4); dit is dus Y.

Ter constructie van N zonder het punt q trekke men XK // pM en KN // Mq en neme KU = UN; uit de gelijkvormigheid der figuren QMgq en XKUN volgt dan XN // pq. — Ter constructie van Y zonder het punt x uit de evenredigheid Pp : pX = Xx : xY trekke men QN′ // OA, verbinde N′ met X en trekke NY $\perp$ N′X. — Want dan is de figuur PN′pX ∽ XNxY (PN′ // OR $\perp$ XN). — Of men kan, zonder bepaling van N, N′ op PR projecteeren, de projectie met X verbinden en door K een rechte lijn loodrecht op de verbindingslijn trekken.

Wij merken ten slotte nog op, dat de bekende eigenschap van de raaklijn der cissoïde, dat DE = $\frac{1}{4}$BD, ook eenvoudig uit de gegeven figuur volgt. Daar nl. CL de richting der raaklijn van de cissoïde aangeeft (zie het bewijs boven) en CO = PD, is $\triangle$ COL $\cong$ $\triangle$ PDE, dus DE = $\frac{1}{4}$PR = $\frac{1}{4}$BD ($\triangle$ CPR $\cong$ $\triangle$ ODB).

BIBLIOGRAPHIE.

J. Boussinesq. **Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière.** Tome II. Refroidissement et échauffement par rayonnement, conductibilité des tiges, lames, et masses cristallines, courants de convection, theorie mécanique de la lumière. Groot 8^{0}, 625 pag. Parijs, Gauthier—Villars, 1903.

Het eerste deel van dit werk is beproken in Deel V, Nieuw Archief, pag. 321. Daar is de grondslag weergegeven, waarop de schrijver zijn beschouwingen omtrent warmte en licht laat steunen. Dit tweede deel bevat als vervolg op de 20 „lessen" van het eerste deel een vijftien nieuwe lessen, waarin allereerst de warmte-straling wordt behandeld door herleiding tot warmtegeleidingen met een toepassing op de seculaire aardafkoeling (21—24ste les.) Dan de aanhoudende en ongelijke verwarming van een bol door geleiding en door straling (25 en 26.) De lessen 27—31 handelen over de voortplanting van warmte in een homogene onbegrensde vaste stof van één, twee of drie afmetingen. De temperatuurverdeeling rondom een verwarmingscentrum, de emanatie, hetzij rechtlijnig of wervelend, al naar den aard van de stof symmetrisch is of niet, maken het onderwerp uit van hoofdstuk 32. De drie volgende lessen zijn niet opgenomen in het oorspronkelijk plan voor dit werk, zooals de schrijver dat in de voorrede van deel I heeft ontwikkeld; zij zijn in hoofdzaak gewijd aan warmte-voortplanting in lichamen in beweging verkeerende: vloeistoffen met een ongelijke snelheid door buizen stroomende, en vaste lichamen die trillen of zich vervormen.

Een benadering ingevoerd voor den wederkeerigen invloed van de zichtbare beweging der lichamen op de warmtebeweging voert den schrijver langs korten weg tot vergelijkingen met partieele afgeleiden, die reeds in 1835 door Duhamel zijn gegeven.

De verwaarloozing van de dichtheidsveranderingen in ongelijk verwarmde vloeistoffen (voor zoover die in de berekening niet met g, de graviteitsconstante vermenigvuldigd voorkomen) maakt enkele eenvoudige gevallen van convectie en afkoeling handelbaar. De formules van Fourier vereenvoudigd door Poisson, die aan de algemeene vergelijkingen van de Hydrodynamica moeten worden toegevoegd en in het algemeen niet integrabel zijn, worden dit wel door bovengenoemde verwaarloozing voor het geval de vloeistof is in uniforme translatie, en leveren resultaten in goede overeenstemming met de experimenten van P. Compan. Het geval, dat de vloeistof in rust is, geeft analogieën aan, die rekenschap geven van de experimenteele resultaten van Dulong en Petit omtrent het afkoelend vermogen van gassen.

Behalve deze vijftien lessen bevat het boek twee „Notes", een over den weerstand tegen kleine bewegingen in een onbegrensde vloeistof, opgewekt door een ingedompeld vast lichaam, voor verschillende eenvoudige vormen van dit vaste lichaam.

De tweede noot beslaat ruim de helft van dit deel, en is gewijd aan de mechanische lichttheorie. Deze vooral is aanzienlijk uitvoeriger behandeld dan oorspronkelijk was aangegeven. De schrijver geeft een opsomming van later toegevoegde onderwerpen van ruim een pagina, aan het slot waarvan hij zegt: „En in al deze onderwerpen vertoonen de lichtverschijnselen deze eigenaardigheid, dat de grondwetten zoo eenvoudig zijn als slechts denkbaar is. De ether, hetzij in vrijen toestand, of ponderabele moleculen bevattende, schijnt meer dan elke andere elastische middenstof een maximum van eenvoud in zijn bewegingsvergelijkingen te paren aan het vermogen om transversaal te trillen".

De grondslagen van deze lichttheorie zijn door den schrijver reeds in 1867 uitgesproken. Dat ze nu in dezen vorm het licht hebben gezien, is een gevolg van een verzoek van Carvallo, gedaan naar aanleiding van de tegenwoordige onderzoekingen omtrent brekingsindices en voortplantingssnelheden in het infrarood. De schrijver is van meening, dat de werking van de ponderabele moleculen op den ether op intra-moleculaire afstanden niet mogen verwaarloosd worden in de bewegingsvergelijking voor den ether, maar dat juist deze aantrekkingen kleine termen geven, die evenredig zijn met de kleine verplaatsingen, die

Carvallo zich genoodzaakt zag in te voeren om de werkelijke voortplantingssnelheden in het infra-rood te verklaren.

Deze omvangrijke studie zal de aandacht der physici, die ze zeker verdient, des te eerder op zich vestigen, daar de schrijver zooveel mogelijk analytische uitwerkingen heeft willen vermijden, en hij aan z'n lezers niet al te hooge mathematische eischen stelt. C. S.

Propagation de l'Électricité. Histoire et théorie par Marcel Brillouin. Een deel in 8°, IX, 398 p. Parijs, Hermann, 1904.

Dit boek geeft de lessen door den schrijver gehouden in het Collège de France gedurende den cursus 1901/1902. Het beoogt niet te zijn eene volledige en methodische verhandeling over electriciteit van uit eene bepaalde theorie. De historische ontwikkeling treedt daarentegen op den voorgrond. Het boekdeel geeft dan ook in hoofdzaak in chronologische volgorde een objectief overzicht over het werk door verschillende onderzoekers, hier en daar ook eigen werk, op dit gebied verricht.

Het is verdeeld in vier boeken, waarvan het eerste behandelt de verhandelingen van Cavendish, Davy, Barlow, Becquerel en uitvoeriger die van Ohm, Kirchhoff en Clausius betreffende stationnaire electrische stroomen.

Het tweede boek, bestaande uit acht hoofdstukken, is getiteld „Courants permanents ou variables sans induction", en behandelt: algemeene vergelijkingen voor stroomen in de ruimte; oplossingen of benaderingen voor bijzondere gevallen, zooals de benadering van Rayleigh van den overgangsweerstand van een geleidenden cylinder in een naar ééne zijde van een plat vlak uitgebreiden geleider van groote afmetingen, verder de theorie van een eindigen cylindrischen geleider met stroomdichtheid symmetrisch verdeeld om de as. Ten behoeve hiervan wordt een hoofdstuk gewijd aan eenige eigenschappen van de Bessel'sche functie J_0. Verder een overzicht van het werk van Kelvin betreffende kabels (zonder inductie in rekening te brengen) en ten slotte iets over het electrostatisch veld ten gevolge van stroomen.

Het derde boek handelt over inductie. Na vermelding der fundamenteele proeven volgens Faraday, Lenz, enz. worden de algemeene wetten van inductie afgeleid en de begrippen weder-

keerige- en zelfinductie en vectorpotentiaal ingevoerd, waarna verschillende toepassingen behandeld worden, als: cylindrische draad, concentrische cylinders, twee evenwijdige draden, cylindrische en bolvormige draadklossen. Verder wordt aangetoond dat bij snel veranderlijke stroomen de stroomdichtheid zich aan de oppervlakte der geleiders concentreert, terwijl in het zevende en achtste hoofdstuk het vraagstuk der kabels nog eens wordt ter hand genomen, nu met inachtneming van inductie (Kirchhoff).

In het laatste boek worden de veldvergelijkingen van Maxwell-Hertz opgesteld, het verschil met de oude theoriën in het licht gesteld, en een overzicht gegeven van de verhandeling van Hertz betreffende het veld van een vibrator en van de ontwikkelingen van Pearson en Lee, die de demping daarbij in rekening brengen (geillustreerd door de oorspronkelijke figuren dier verhandelingen). De twee laatste hoofdstukken behandelen de electrische trillingen van een geleidenden bol en van eene gerekte omwentelings-ellipsoide; dit laatste hoofdstuk is vrij uitvoerig en geeft een aantal getallen-coëfficienten, die bij de berekening in bijzondere gevallen dienst kunnen doen; de schrijver komt daarbij gedeeltelijk tot dezelfde resultaten, die Abraham 1898 in Wied. Ann. publiceerde.

Het is te betreuren, dat het werk ontsierd wordt door een aantal soms storende drukfouten in de formules.

W. H. K.

La Théorie Gyrostatique de la Lumière, par H. Chipart. Een deel in 8°, 192 p. Parijs, Gauthier-Villars, 1904.

Dit werk behandelt in gecondenseerd mathematischen vorm de wetten van voortplanting, terugkaatsing, breking, enz. van het licht in isotrope en anisotrope lichamen. Uitgangspunt is: „de ether is eene middenstof zonder elastische rigiditeit, alleen begaafd met gyrostatische rigiditeit (quasi-rigide ether van Kelvin)".

De inleiding geeft na een zeer kort overzicht over den ontwikkelingsgang der lichttheoriën, in het kort de redenen aan, waarom de elastische theorie te verwerpen, de gyrostatische theorie (reeds in beginsel door MacCullagh in 1839 opgesteld) aan te nemen is.

Het eerste hoofdstuk bevat algemeene beschouwingen over

de symmetrie van kristallijne media, verder het cinematisch onderzoek der deformaties, de dynamica van continue media, de hypothese van Green betreffende den inwendigen potentiaal, de vergelijkingen van Lagrange. Door verschillende schrijvers zijn mechanische voorstellingen gegeven voor een gyrostatisch medium, o. a. die van atoomwervels door Kelvin. De verplaatsingen *u*, *v*, *w* en de rotaties *p*, *q*, *r*, die in de bewegingsvergelijkingen voorkomen, zijn dan niet die voor een continu medium, doch stellen zekere middelwaarden voor. Het is dan niet evident, dat de mechanische uitdrukking, waaraan men de rol van levende kracht zal toekennen, eene isotrope functie moet zijn. Uit de bestudeering der lichtverschijnselen blijkt, dat eene der functies T (levende kracht) of W (inwendige potentiaal) eene isotrope functie moet zijn, en dat de constante van die functie voor alle media dezelfde moet zijn. De tot heden ontdekte verschijnselen kunnen door beide mogelijke onderstellingen even goed verklaard worden. Chipart neemt met MacCullagh aan, dat T isotroop is (en derhalve de dichtheid van den ether in alle media dezelfde).

Het tweede hoofdstuk behandelt de voortplanting in eene homogene gyrostatische middenstof: dubbele breking, draaiing van het polarisatievlak (ook in oplossingen en door een bundel van hemiëdrische lamellen) en normale dispersie.

Derde hoofdstuk: Breking en terugkaatsing aan het oppervlak van gyrostatische middenstoffen. Grensvoorwaarden: tangentieele verplaatsingen (*u*, *v*) en koppels (P, Q) continu (scheidingsvlak $z = 0$). Hieruit volgen de wetten van terugkaatsing en breking bij homogene media. Uniradiale breking volgens MacCullagh. Ontbinding van eene willekeurig op het scheidingsvlak aankomende trilling in twee uniradiale. Tot hiertoe was gesteld, dat de inwendige gyrostatische potentiaal W eene functie was van de rotaties *p*, *q*, *r* en van hare afgeleiden naar *x*, *y*, *z*. MacCullagh stelde in 1842 de hypothese op, dat W meer bepaald eene functie is van *p*, *q*, *r* en van de vortices (rotaties) van opvolgende orden van dezen vector. Hieruit volgt dan o. a., dat een regulair kristal optisch isotroop is.

In hoofdstuk IV wordt de studie van den algemeenen inwendigen potentiaal opgevat. In het algemeen verkrijgt men drievoudige breking; in gyrostatische media zijn twee der trillingen in het golffront gelegen, terwijl de derde eene voortplantings-

snelheid nul heeft. Aangetoond wordt hier, dat elke potentiaal W, die aan deze twee voorwaarden voldoet, tot de wetten van voortplanting der gyrostatische media leidt. De elastische media worden onderzocht: Transversaliteit der trillingen is niet overeen te brengen met het aannemen van centrale krachten. De meest algemeene elastische potentiaal wordt bepaald door het vierdegraadsoppervlak van Haughton en het tweede-graadsoppervlak van Rankine. De transversaliteit eischt, dat het eerste nul wordt. De elasticiteitstheorie is dan (bij de onderstelling van transversaliteit) niet vereenigbaar met het beginsel van de continuiteit der spanningen aan een scheidingsvlak. Om dit terecht te brengen, voegde Kirchhoff aan den potentiaal een oppervlakte-integraal toe; feitelijk komt men zoodoende tot een gyrostatischen potentiaal. Er bestaat slechts één potentiaal, die transversaliteit geeft en aan de voorwaarde van stabiliteit voldoet, dat is de gyrostatische.

Het vijfde hoofdstuk behandelt ten slotte de toepassing van invariante oppervlakken op physische verschijnselen met toepassingen o. a. op pyro- en piëzoelectriciteit, magnetische draaiing van het polarisatievlak, deformatie en dubbele breking tengevolge van electrische kracht, dubbele breking tengevolge van deformatie, verschijnsel van Kerr.

W. H. K.

Leçons sur la Propagation des Ondes et les Equations de l'Hydrodynamique par JACQUES HADAMARD. Een deel in 8°, XIII, 375 p., Parijs, Hermann, 1903.

In dit werk, hetwelk de lessen bevat door den schrijver aan het Collège de France in de jaren 1898/1899 en 1899/1900 gegeven, heeft hij zich hoofdzakelijk ten doel gesteld te onderzoeken, hoe de invloed van de randvoorwaarden zich op de beweging van vloeistoffen en gassen doet gelden. Bij vloeistoffen wordt het vraagstuk teruggebracht tot het tweede randprobleem in de theorie der harmonische functies (functies, die voldoen aan de vergelijking van Laplace), aan welk probleem in hoofdzaak het eerste hoofdstuk is gewijd. Het tweede behandelt de golven uit een kinematisch oogpunt, het derde hoofdstuk het algemeene hydrodynamische vraagstuk uit een dynamisch oogpunt: de algemeene bewegingsvergelijkingen volgens Lagrange en Euler

worden opgesteld en de afhankelijkheid ingevoerd van den druk p van de dichtheid ρ: voor vloeistoffen ρ = const., voor gassen $\frac{p}{\rho^m}$ = const. (m = verhouding specifieke warmten). Het vraagstuk wordt dan: Gegeven op zeker oogenblik overal de snelheden en de uitwendige krachten, bovendien de vergelijking van den rand voor elken tijd daarna. Hierbij moet voor vloeistoffen voldaan worden aan de voorwaarde, dat het totale volume constant moet blijven. Dan wordt het vraagstuk de versnellingen te bepalen teruggebracht tot het bovengenoemde tweede randprobleem. Heeft de vloeistof een vrij oppervlak, alwaar de uitwendige krachten (de druk) gegeven zijn, dan komt men tot een gemengd probleem. Bij gassen komt eene contradictie: ρ (en de temperatuur T) is, benevens de snelheden, op zeker oogenblik overal gegeven; dan is p te berekenen, waarna uit de bewegingsvergelijkingen overal de versnellingen volgen. Deze behoeven aan den rand niet met de aldaar gegeven versnellingen overeen te stemmen. In het vierde hoofdstuk, dat de rechtlijnige beweging van gassen volgens Riemann en Hugoniot meer in het bijzonder behandelt, wordt die contradictie opgeheven doordat aangetoond wordt, dat alsdan aan den rand golven ontstaan, die zich naar het inwendige van het gas voortplanten. In het vijfde hoofdstuk wordt dit uitgebreid tot bewegingen in de ruimte. Het zesde hoofdstuk bevat enkele toepassingen van de in de vorige hoofdstukken behandelde methoden op de theorie der voortplanting in elastische middenstoffen. In het laatste hoofdstuk wordt de algemeene theorie der karakteristieken van partieele differentiaalvergelijkingen van de tweede orde ontwikkeld met toepassingen op de theorie der golven in de hydrodynamica en de elasticiteitstheorie.

Een viertal later toegevoegde noten (over het probleem van Cauchy en de karakteristieken, het over elkander glijden van vloeistoffen, over wervels ontstaan door golven van de eerste orde, over reflexie tegen een vasten zuiger) besluiten het boek, dat zich onderscheidt door helderheid van voorstelling en nauwkeurige omschrijving der ingevoerde onderstellingen.

W. H. K.

Recherches sur l'Hydrodynamique par P. Duhem. Deuxième série. Les conditions aux limites. Le théorème

de Lagrange et la viscosité. Les coefficients de viscosité et la viscosité au voisinage de l'état critique. Een deel in 4°, 153 blz. Parijs, Gauthier-Villars, 1904.

Deze verhandeling, overgedrukt uit de „Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse", 2e série, t. V, 1903, is een vervolg van vroegere verhandelingen van den schrijver onder denzelfden hoofdtitel. Er wordt dan ook een veelvuldig gebruik gemaakt van vroegere uitkomsten en formules, zoodat dit werk slechts in verband daarmede te lezen is.

Reeds op eene andere plaats (Théorie thermodynamique de la viscosité, du frottement et des faux équilibres chimiques, „Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux", 5e série, t. II, 1896) had de schrijver de beginselen opgesteld, volgens welke de uitwendige wrijving in de vergelijkingen der dynamica en hydrodynamica moet worden ingevoerd. Dit wordt in het eerste gedeelte van deze verhandeling vierde gedeelte van deze serie) weer ter hand genomen met het doel enkele duister of onvolledig gebleven punten op te helderen. De theorie wordt ook op enkele bijzondere problemen toegepast. We noemen slechts, dat bij het geval van concentrische cirkelvormige cylinders, waarvan de eene stilstaat en de andere met eenparige snelheid roteert, terwijl zich daartusschen eene wrijvende vloeistof bevindt, de snelheidsgrenzen aangegeven worden, tusschen welke de vloeistof adhereert aan beide cylinders, aan een van beide, of aan geen van beide.

In het volgende gedeelte (vijfde gedeelte van de serie) wordt onderzocht, of het theorema van Lagrange (als in eene wrijvinglooze vloeistof voor een elementair massadeeltje op eenig oogenblik de rotatievector nul is, dan blijft deze voor dat deeltje gedurende de geheele beweging nul) ook tot wrijvende vloeistoffen kan uitgebreid worden. De schrijver bewijst, dat dit bij zekere onderstellingen het geval is.

In het laatste deel worden de verschillende betrekkingen, die door onderscheidene schrijvers zijn aangenomen tusschen de twee coëfficienten, die in de theorie van inwendige wrijving van vloeistoffen optreden, aan een kritisch onderzoek onderworpen, en verder de verschijnselen van inwendige wrijving in eene vloeistof in of nabij de kritische omstandigheden onderzocht. In eene vloeistof, waar de dichtheid ρ van plaats tot

plaats verandert, is $\frac{dp}{dt}$ (t = tijd) evenredig aan $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T$, als p = druk, T = temperatuur is. In de nabijheid van het kritisch punt wordt $\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T$ zeer groot, en dus $\frac{d\rho}{dt}$ klein, ook al is de dichtheid ρ merkbaar van de gemiddelde dichtheid verschillend. Er kunnen zoo toestanden van quasi-evenwicht bestaan. Dit geeft volgens den schrijver de verklaring van het langen tijd blijven bestaan van dichtheidsverschillen in eene stof die zich in of nabij de kritische omstandigheden bevindt.

De verschillende gedeelten bevatten tevens een volledig historisch en kritisch overzicht over hetgeen door vroegere schrijvers op dat gebied is gewrocht.

W. H. K.

Thermodynamique. I. Notions Fondamentales par M. L. MARCHIS. Avec préface de M. P. DUHEM. Een deel in 8°, 176 p. Parijs, Gauthier-Villars; Grenoble, A. Gratier et J. Rey; 1904.

Dit werk vormt een deel van de 3de afdeeling („physique industrielle") van de „Bibliothèque de l'Élève Ingénieur", welke verzameling, uitgegeven onder leiding van J. Pionchon, ten doel heeft aan jonge ingenieurs een leiddraad te geven, die hun de grondslagen der verschillende takken van wetenschap, voor zoover zij die noodig hebben, op overzichtelijke wijze voor oogen stelt. Ter omschrijving van het gebied, waarover deze verzameling zich uitstrekt, noemen we de titels der 5 afdeelingen: „mathématiques", „mécanique", „physique industrielle", „électricité industrielle", „économie industrielle".

Het hier aangekondigde deel geeft de grondbeelden der thermodynamica: beginsel van equivalentie van warmte en arbeid, het beginsel van Carnot-Clausius, entropie, nuttige energie („énergie utilisable", bijzonder geval: voor isothermische processen: vrije energie), en de toepassing op de thermodynamica van het galvanisch element. Een deel II zal de toepassingen op gassen en vloeistoffen behandelen.

Het geheel is overzichtelijk voorgesteld, de redactie is op sommige plaatsen minder duidelijk. We noemen slechts dat de formuleering van het theorema van Carnot-Clausius op p. 79

tot eene ernstige vraag aanleiding zou kunnen geven, en dat de tabellen I en II bevatten de onderstelling dat 1 erg $= 10^{-8}$ KGM.

Te roemen is de heldere wijze, waarop de schrijver in navolging van Duhem, het begrip „omkeerbaar proces" uiteenzet.

W. H. K.

La Mécanique, Exposé historique et critique de son développement par Ernst Mach. Ouvrage traduit sur la quatrième édition allemande par Émile Bertrand. Avec une introduction de Émile Picard, Membre de l'Institut. Paris, Librairie Scientifique A. Hermann, 1904. (15 fr.).

Deze vertaling van het zeer bekende en veelbesproken werk van Mach „Die Mechanik in ihrer Entwickelung, historisch kritisch dargestellt", dat voor de eerste maal in 1883 als een deel der „Internationale wissenschaftliche Bibliothek" verscheen, heeft ten doel de daarin ontwikkelde denkbeelden, de kritiek der beginselen van de Mechanica meer algemeen bij de Fransche beoefenaars dier wetenschap bekend te maken.

Het werk van Mach verdient ten volle in zoo wijd mogelijken kring bekend te worden. Ieder, die zich met de studie der mechanica bezig houdt, heeft ondervonden en ondervindt nog telkens, welke moeielijkheden zich voordoen wanneer men een juist begrip wil hebben van de beginselen, waarop deze wetenschap berust en zich rekenschap wil geven van den geringen samenhang, van de weinige overeenstemming tusschen die beginselen. Ten einde die moeielijkheden, zij het ook slechts ten deele, te overwinnen, is kennis van de geschiedenis der wetenschap, van de wijze, waarop deze beginselen zich hebben ontwikkeld, onmisbaar. Op meesterlijke wijze is nu deze geschiedenis door Mach beschreven; vooral het tweede en derde hoofdstuk van zijn boek, waarin hij de beginselen der dynamica behandelt, is van groot belang. Daarin schetst hij wat de drie grondleggers der wetenschap van de beweging, Galilei, Huyghens en Newton elk afzonderlijk tot onze kennis hebben bijgedragen. Galilei legt den grondslag voor de kennis der beweging van een materieel punt in een constant krachtenveld; hij houdt zich slechts met de beweging van één punt bezig en maakt nog geen onderscheid tusschen massa en gewicht. Ter loops komt

hij tot de wet der traagheid en wordt hij geleid tot het grondbegrip dat de omstandigheden, die de beweging bepalen, versnellingen voortbrengen. Huyghens houdt zich bezig met veranderlijke krachten en met de dynamica der materieele stelsels. Hoewel voor hem het begrip massa nog weinig scherp omschreven is, geeft hij toch de oplossing van een, voor zijn tijd, buitengewoon moeielijk vraagstuk, het vraagstuk van den samengestelden slinger en maakt bij die oplossing in werkelijkheid voor de eerste maal gebruik van het theorema der levende kracht. Newton eindelijk bouwt de dynamica geheel op. Hoewel hij minder gelukkig de massa beschouwt als de hoeveelheid materie, wordt hem het eerst duidelijk dat er in ieder materieel punt eene voor de beweging karakteristieke constante nl. de massa optreedt, die verschilt van het gewicht. Eene discussie van dit belangrijke begrip beslaat eene groote plaats in de merkwaardige kritiek van Mach over de denkbeelden van Newton, een critiek die tot velerlei besprekingen en tegenspraak aanleiding heeft gegeven.

Is de mechanica, vooral in 't begin een zuiver physische wetenschap geweest, op de periode van inductie is eene deductieve periode gevolgd waarin men getracht heeft aan de beginselen een definitieven vorm te geven; in die periode treedt de mathematische ontwikkeling dier beginselen meer op den voorgrond. Ook met deze periode van mathematische ontwikkeling, waarin vooral vragen omtrent maximum en minimum, men denke slechts aan het beginsel der kleinste werking, werden behandeld, houdt Mach zich bezig; naar aanleiding daarvan bespreekt hij ook den invloed der theologische begrippen op die, waarop de mechanica is opgebouwd.

De fransche vertaling door Bertrand laat zich zeer aangenaam lezen. Zij wordt voorafgegaan door eene inleiding van Émile Picard, waaraan in het bovenstaande een en ander is ontleend.

Z.

A. Macfarlane. Bibliography of quaternions and allied systems. Dublin, University Press, Ponsonby and Gibbs 1904, 8°, 36 blz.

De schrijver, "general secretary of the Internatial-Association for promoting the study of quaternions and allied systems of mathematics", heeft met behulp van eenige andere leden der

vereeniging een zoo volledig mogelijke lijst gegeven van de geschriften, die over quaternionen en aanverwante onderwerpen handelen. De lijst heeft dus in de eerste plaats betrekking op de onderwerpen, die in den Internatialen Catalogus gerangschikt zijn in de afdeelingen 83, (Quaternions) en 84 (Ausdehnungslehre and Vector Analysis), terwijl bovendien zijn opgenomen de geschriften, die behooren tot de afdeelingen 82 (Complex numbers) en 85 (Matrices). De rangschikking is alphabetisch naar de namen der schrijvers. De oudste der vermelde geschriften zijn: Caspar Wessel, "Om directionens analytiske Beteyning" 1799, en Jean-Robert Argand, "Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques" 1806. Sinds dien tijd vindt men, dat de hier bedoelde onderwerpen over de geheele wereld de aandacht der geleerden hebben beziggehouden. Ruim duizend titels worden vermeld. Kl.

H. Poincaré. La Théorie de Maxwell et les ondes Hertziennes. La Télégraphie sans fil. Een deel in klein 8°, 110 p., Parijs, C. Naud, 1904.

Dit werkje vormt No. 23 der physisch-mathematische reeks der bekende uitgave Scientia, die ten doel heeft over actueele wetenschappelijke onderwerpen een overzicht te geven, dat gemakkelijk verstaanbaar is ook voor degenen die zich niet juist in die bepaalde richting hebben gespecialiseerd. Het behandelt, na eene korte inleiding over de theorie van Maxwell, uitvoerig de Hertz'sche electromagnetische golven en de toepassing daarvan gemaakt in de draadlooze telegraphie volgens Marconi.

Het boekje kan zeer ter lezing worden aanbevolen.

W. H. K.

V

A BRIEF HISTORY OF THE JAPANESE MATHEMATICS,

BY

TSURUICHI HAYASHI,

Lecturer of Mathematics in the Tokyo Kōtō Shihan Gakkō, Japan.

INTRODUCTION.

1. In the following, I have aimed at writing a brief history of mathematics in Japan from the most ancient times to the Restoration of the year 1868. Since that date, institutions and customs of Western civilization have been rapidly introduced, and Japan made such progress on every side that it attained the present civilization. Japanese mathematicians began to devote themselves entirely to the study and the investigation of mathematics imported from Europe and America, paying little attention to the *Wasan*, that is, the mathematics peculiar to Japan, which had existed before the Restoration. I am not going to describe the latest mathematics in the following paper, but I intend to mention the history of *Wasan* itself.

There is only one book of this kind written in Japanese; it is the "History of Mathematics in Great Japan" (*Dai Nihon Sugaku Shi*) published by Mr. Toshisada Endō, a teacher of the Akita middle school. He devoted as many as sixteen years to the compilation of this book with incessant effort and persevering diligence. It must be said that it is an extremely difficult task in the present circumstances to collect and arrange such materials as those which are contained in that book. He accomplished his great undertaking with careful and persevering effort, without caring for the loss of time, effort and money. He is one of a few old mathematicians who now live in the country, and is versed in the so-called *Wasan*; and so he is most fitted for the redaction of

such a book. Criticising fairly his work, it may be said that it is almost impossible for scholars, who are now studying and investigating modern mathematics, to understand all its contents, because the technical terms and mode of expression are entirely in the manner peculiar to the *Wasan*. Therefore, it is necessary to make complete preparations and to be quite at home in the *Wasan* itself in order to comprehend the book. It is however, extremely difficult to learn the *Wasan* now-a-days. Dr. P. H. SCHOUTE, Professor of the Groningen University, Holland, kindly suggested to me to translate the book into English and I willingly accepted his proposal. It is not however a good plan to translate it into English without any changes, because, though many notes might be added in several places, it is almost impossible for foreigners to understand it, it being very difficult even for us Japanese. So that, besides getting most materials from Mr. ENDŌ's work with his permission, I added other things which I have got from books on the *Wasan*; these I compiled, trying thus to make the work easier to comprehend. (There are more than two thousand volumes of both manuscript books and printed books on *Wasan* in the Tokyo Imperial University.) I have written this treatise in a manner quite different from that of Mr. ENDŌ's history and omitted those parts which I thought of no interest for foreigners. As it is indeed a difficult thing to relate the history of the Japanese mathematics minutely, I shall treat the different parts in succession when I have time to spare. My master, Baron D. KIKUCHI, Honorary Professor of the Tokyo Imperial University and Ex-Minister of the Educational Department of the Japanese Government, has issued several translated tracts, as is mentioned afterwards.

2. In writing this history, I divide the time into the following five periods just as Mr. ENDŌ does in his work:

The First Period (from the earliest age to 553 A.D.). During this period mathematics peculiar to Japan was not influenced by the Chinese mathematics.

The Second Period (554—1591 A. D.). The first importation of the Chinese mathematics through Korea, its direct importation from China, the earnest investigation of it by Japanese mathematicians, and its fall.

The Third Period (1592—1672 A. D.). The Chinese mathematics was again imported. The famous mathematician TAKAKAZU SEKI introduced several mathematical methods and truths by his own invention and, teaching them to his pupils, established the foundation of the Seki school. Indications of learning mathematics from Europeans, especially from Dutchmen.

The Fourth Period (1673—1771 A. D.). The mathematics peculiar to Japan made great progress, the Seki school reaching its highest point of development.

The Fifth Period (1772—1868 A. D.). The investigation of mathematics succeding the last period became more vigorous.

3. The chief valuable papers in foreign languages on the old Japanese mathematics are those of my masters Prof. D. KIKUCHI and Prof. R. FUJISAWA.

Prof. D. KIKUCHI: "On the method of the old Japanese school to find the area of a circle" (*The Tōkyō Sūgaku—Buturigakkwai Kiji*, Vol. VII, p. 24—26).

————————: "Various series for π obtained by the old Japanese mathematicians" (ibidem, Vol. VII, p. 47—53).

————————: "A series for π^2 obtained by the old Japanese mathematicians" (ibidem, Vol. VII, p. 107—110).

————————: "Ajima's method to find the length of an arc of a circle" (ibidem, Vol. VII, p. 114—117).

————————: "Seki's method to find the length of an arc of a circle" (ibidem, Vol. VIII, p. 179—198).

Prof. R. FUJISAWA: "Note on the mathematics of the old Japanese school" (*Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens*, 1900, publiés par E. DUPORCQ, p. 379—393).

4. The readers are requested to notice the following fact. It is a custom with the Japanese to put the family name before the Christian name, in opposition to the European custom; but following the European custom I shall put the Christian name first and the family name after.

5. Finally I must apologize that the work is composed with poor sentences and with grammatical errors, as I am unskilled

in writing English. As I am constantly engaged in both public and private affairs, I called in Mr. T. TAKECHI's assistance for the translation and so I accomplished the work. Yet he is not fully skilled in English either; so many inaccuracies may remain. The reader will be generous enough to read my work, overlooking the passages of broken English.

FIRST PERIOD,

(from the great antiquity to 553 A. D.).

6. It is undoubted that the early civilization of Japan has been promoted by the influence of those of its neighboring countries, China and Korea, since these countries, especially the former, had been very flourishing in ancient times. When the intercourse of Japan with these countries was at its height, mathematics was imported with the rest. Before that, barbarous and uncivilized though the nation was, it of course cannot be believed that in the remote days the Japanese had no method of counting among them. Here we will treat the first period, the age before it was influenced by the intercourse.

7. In the reign of Izanagi-no-Mikoto, the ancestor of Mikado or Emperors, (history does not exactly ascertain the date, but it is supposed to be extremely long before the firm foundation of the unbroken dynasty of Japan by the first Emperor Jimmu in 660 B. C.), the following names of numbers were commonly employed:

hito (1),	futa (2),	mi (3),
yo (4),	itsu (5),	mu (6),
nana (7),	ya (8),	koko (9),
tō (10);		

and

tō (10),	so-yorozu (10^5),	so-yorozu-yorozu (10^9),
momo (10^2),	momo-yorozu (10^6),	momo-yorozu-yorozu (10^{10}),
chi (10^3),	chi-yorozu (10^7),	chi-yorozu-yorozu (10^{11}),
yorozu (10^4),	yorozu-yorozu (10^8),	yorozu-yorozu-yorozu (10^{12}),

etc., etc.

The terms from one to ten much resemble those which we employ at the present time; we only add to them the suffix *tsu*, as *hitotsu*, *futatsu*, etc., with the exception of nine which we call *kokonotsu* and ten which we call *tō* also. From the above mentioned table we learn that the scale of counting was decimal from this time. As is also evident from this table the first period of places is *yorozu*, the second *yorozu-yorozu*, the third *yorozu-yorozu-yorozu*, etc. Thus in this nomenclature of numbers we remark a period of four places, the names of these periods being *yorozu, yorozu-yorozu, yorozu-yorozu-yorozu*, etc.; the ancient people did not try to contract these long names repeating *yorozu*. This nomenclature of numbers differs much from the European in which one period consists of three places only. At present, we do not use the names *momo*, *chi*, *yorozu*, *so-yorozu*, *yorozu-yorozu*, etc., in daily life. Instead of these we use the following names:

ichi	(1),	ni	(2),	san	(3),
shi	(4),	go	(5),	roku	(6),
shichi	(7),	hachi	(8),	ku	(9),
jiu	(10),	hyaku	(10^2),	sen	(10^3),
man	(10^4),	jiu-man	(10^5),	hyaku-man	(10^6),
sen-man	(10^7),	oku	(10^8),	jiu-oku	(10^9),
hyaku-oku	(10^{10}),	sen-oku	(10^{11}),	chiō	(10^{12}), etc.

The numerals between ten and twenty are expressed by *jiu*=ten, with the addition of the number required. Thus eleven is *jiu ichi*, twelve *jiu-ni*, and so on. Twenty is expressed by two tens, *ni-jiu*, and thirty by three-tens, *san-jiu*, and so on; until a hundred is reached, for which number the name *hyaku* is used. In combination with figures above one hundred and below two hundred the numeral *ichi* is placed before *hyaku* changed into the form *ip-pyaku*, and the additional number follows. For instance, a hundred and twenty is rendered by *ip-pyaku ni-jiu*. Two hundred is *ni-hyaku*, and the remaining hundreds are expressed in the same manner up to a thousand. One thousand is *is-sen*, reduced from *ichi-sen*; two thousand is *ni-sen*, and so on. When a break occurs in the sequence of figures it is sometimes indicated by the word *rei* which corresponds to the nought used in European enumeration in similar circumstances. Above *chiō*, the following names are used:

kyō (10^{16}),	gai (10^{20}),	si (10^{24}),
jio (10^{28}),	kō (10^{32}),	kau (10^{36}),
sei (10^{40}),	sai (10^{44}).	

These modern names were originally Chinese and were imported from China after the intercourse had begun between the two countries.

8. It seems that in the reign of Izanagi-no-Mikoto the people had already a system of measures and weights. Though not exactly known as a matter of course, the names of the standard units of measurements are handed down to us: *tsuka*, that is, the hand-breadth; *ata*, that is, the distance from the tip of the thumb to that of the middle finger when they are opened as wide as possible; *hiro*, that is, the distance between the tips of the middle fingers when one's arms are extended horizontally on both sides. To know weights, there existed a balance called *ama-no-mihakari:* a method of letting a lever supported at its middle point keep balance by putting two weights at either end. A calendar called *Santen-Reki*, though it must have been very imperfect, was composed, based on the observation of the motions of the sun and the moon. From these facts, we can justly infer that arithmetic was somewhat in a state of development.

9. In the reign of the first Emperor Jimmu (660—585 B. C.), year, month, and day were fixed; the commencement of the year was the beginning of spring and the year was divided into four seasons and twelve months.

10. The expenditures and receipts of the Imperial Treasury, history says, were kept accurately in books by the officials in the reign of the seventeenth Emperor Richu (400—405 A. D.). Whatever little progress arithmetic made, we must believe that the four species of calculation, i. e. addition, subtraction, multiplication and division, were known.

11. Before this, under the reign of the twelfth Emperor Keikō, the country had been divided into provinces, counties, and villages which made up the monarchial form of govern-

ment. Their officers may, of course, be supposed to have had some knowledge of arithmetic. The *Lun-yu* or the Confucian Analects was presented to the fifteenth Emperor Ōjin (201—301 A. D.) by WA-NI (the Chinese pronunciation being WANG-JÊN) who came from Korea to Japan. The celebrated Chinese Five Classics (or *Wu-king*), namely, The Book of Changes, The Book of History, The Book of Odes, The Spring and Autumn Annals, and The Book of Rites, were also imported to Japan in the reign of the twenty-sixth Emperor Keitai (507–531 A. D.). The passages concerning numbers in these books must have been understood and enjoyed by means of the hitherto-obtained knowledge of mathematics. The mere fact that our ancestors had engaged vigorously in Korean trade, makes it impossible for us to deny that arithmetic was in a progressing state. About twelve hundred years had elapsed since the reign of the first Emperor Jimmu, during which time arithmetic had greatly progressed, while a great intellectual development had taken place.

12. But, as the intercourse attained its highest point, the Chinese arithmetic began to be commonly used, and, afterwards, took the place of the Japanese arithmetic, of which no records whatever are handed down. We will now proceed to the period in which the influence of the Chinese mathematics is continually felt.

SECOND PERIOD.
(554–1591 A. D.).

13. In this period, as our intercourse with China and Korea was full of vigour, the Chinese mathematics which at a previous time had come through Korea was directly transmitted and our countrymen went to China to continue their study of mathematics. Our own early mathematics had been annihilated, instead of which the Chinese had been chiefly used; in the third period only, as we will mention next, the proper mathematics peculiar to Japan came into existence. Now we will study the first importation of the Chinese mathematics.

14. Korea was divided at that time into three or four small kingdoms, but not forming an empire as the present one. From Kudara (the Chinese pronunciation being Poh-tsi), one of the kingdoms, WANG-TAO-LIANG, doctor of *Yi*, (the doctrine of *Yi* or Changes which has close connection with mathematics is demonstrated in *Yi-king* or The Book of Changes, the most ancient one of the famous Chinese Five Classics), came to Japan accompanied by WANG-PAO-SAN, doctor of chronology, in the fifteenth year of the Emperor Kimmei (554 A. D.). It was the source of prosperity of the Chinese mathematics, as the study of chronology requires of course a superior knowledge of mathematics. But the two doctors never lectured at a public school.

15. The tenth year of the Empress Suiko (602 A. D.) KWAN-RŌ, a Buddhist priest, came from Kudara to Japan and presented to Her Majesty a calendar, astronomical books, and books on enchantment and fortune-telling. Every authority studied respectively each of these. Only astronomy and science pertaining to the calendar should have been studied, but since enchantment and fortune-telling were also learnt, people fell to superstitions. In consequence, mathematics was taken for a magic art till the modern age. It was a great impediment to its progress.

16. History says that the calendar, composed in the Sung dynasty of China, was adopted in January, 604 A. D. In the calendar, one day is divided into twelve parts which have the name of *Jiu-ni-Shi* or Twelve Branches in common, and each part has respectively the name of an animal:

The	time	of *ne*	(rat)	refers	to	midnight,
"	"	" *ushi*	(ox)	"	"	2 A.M.,
"	"	" *tora*	(tiger)	"	"	4 A.M.,
"	"	" *u*	(rabbit)	"	"	6 A.M,
"	"	" *tatsu*	(dragon)	"	"	8 A.M.,
"	"	" *mi*	(snake)	"	"	10 A.M.,
"	"	" *uma*	(horse)	"	"	noon,
"	"	" *hitsuzi*	(sheep)	"	"	2 P.M.,
"	"	" *saru*	(monkey)	"	"	4 P.M.,
"	"	" *tori*	(cock)	"	"	6 P.M.,
"	"	" *inu*	(dog)	"	"	8 P.M.,
"	"	" *i*	(boar)	"	"	10 P.M.

The names were constantly used until the present system was adopted about forty years ago, at the Restoration of the year 1868; and at the present time we still say *gozen* (before-horse) for the English before-noon, *gogo* (after-horse) for the English after-noon, and *shōgo* (proper-horse) for the English noon.

The twelve branches together with the ten stems were used by the Chinese to designate years, forming a sexagenary cycle. Prof. Terrien de Lacouperie has shown, as Prof. R. K. Douglas of London writes in his "Chinese Manual", that these words forming the twelve branches and the ten stems are of Babylonian origin. The use in China of the sexagenary cycle dates back to a very early period, and its years are designated by a combination of two words from two series of the ten stems and the twelve branches. They are pronounced in Chinese as follows:

Ten stems:	Twelve branches:
Kiah,	*Tsu*,
Yih,	*Chou*,
Ping,	*Yin*,
Ting,	*Mao*,
Wu,	*Shên*,
Ki,	*Ssu*,
Kêng,	*Wu*,
Sin,	*Wei*,
Jên,	*Shên*,
Kwei.	*Yu*,
	Süh,
	Hai.

The first year of each cycle is therefore *Kiahtsu*, the tenth is *Kweiyu*, the eleventh *Kiahsüh*, the twelfth *Yihhai*, and so on until the last two words in the two series combine at the sixtieth closing the cycle.

This way of designating years was adopted also in Japan at a very early period.

17. In the reign of the thirty-fourth Emperor Jomei (629—641 A.D.) a Chinese system of measures and weights was adopted, annihilating the one peculiar to our country, handed down from the time of Izanagi-no-Mikoto. This would seem to show that the Chinese mathematics had been much used.

18. In the reign of the Empress Saimei (655—661 A. D.) the next Emperor Tenchi, when the Crown Prince, invented a time-measurer for the first time, 660 A. D. Its construction is thus: A small hole is made on the side of a jar near the bottom, out of which the water contained is allowed to drip slowly. A rod is vertically set up in the jar and its part which remains above the surface of the water indicates the time.

19. The Emperor Tenchi (662—671 A. D.) set up a school for the first time, where he had two doctors and twenty students who entirely devoted themselves to the study of mathematics. He is said to have established an astronomical observatory and to have engaged some doctors for the observations. This is the commencement of observational astronomy in Japan. From these facts we must conclude that mathematics must have made great progress in that reign.

20. In 692 A. D. i. e. the sixth year of the Empress Jito, the *Yuen-Kia* calendar was adopted publicly, which was composed by Hō-Chêng-tien in the reign of the Emperor Wang-te of the Sung dynasty of China. Since it was found that this calendar was imperfect, the *Lin-teh* calendar was substituted in 696 A. D.; this calendar is the one composed by Li-Shun-fêng in the reign of Kao-tsung of the Tang dynasty.

21. In 700 A.D., the Emperor Monbu again established an astronomical observatory and had some doctors of astronomy to teach students; the old observatory established by the Emperor Tenchi may have already been disused at this time. In 701 A. D., the same Emperor established a school based on the modern university system where doctors of jurisprudence, doctors of literature, doctors of music, doctors of *Onmio* (*Yin* and *Yang* contained in *Yi-king*), doctors of astronomy, doctors of calendar, doctors of mathematics, doctors of chronology, etc., took upon themselves to lecture on every science and art. The period was prominent in learning. The text books of mathematics of the school were, of course, imported from China. They were published in the age from the Tsin dynasty (265—419 A. D.) and the Wei dynasty (386—557 A. D) till the Tang dynasty (617—935 A. D.) and are called *Swan-king*

(the ten books of mathematics), most of which are said to have been annotated by LI-SHUN-FÊNG of the Tang dynasty. The ten books are said to be as follows, but this is not trustworthy:

1. *Chow-pai-swan-king* (a famous astronomical book of the Chow dynasty (792—717 B.C.).)
2. *Sun-tsu-swan-king* (an arithmetic written by SUN-TSU in the fifth century B. C., who was an eminent man of military tactics.)
3. *Luh-chang.*
4. *San-kai.*
5. *Chung-cha.*
6. *Wu-tsaou-san-suh.*
7. *Hai-tao-san-suh* (book of island-surveying.)
8. *Kiu-sze-san-suh.*
9. *Kiu-chang-san-suh.*
10. *Tio-suh.*

Besides these books there were *Wu-king-san-suh* (arithmetic in the Five Classics), *Hia-hou-yang-swan-king*, etc. Mr. T. ENDŌ says that these may have been also adopted as text books.

We are not able to describe their contents, for scarcely any of them are handed down to us. It is said that *Tio-suh* was not to be understood even in the Zui dynasty, before the Tang dynasty; and so it could not be learnt in our country either.

22. Among the above mentioned ten books, that which was regarded with respect was *Kiu-chang-san-suh*, that is the nine chapters of mathematics, of which there are two versions: the one written by LI-SHOU in 3700 B. C. at the command of the Emperor Hwang-te and the other written by CHOU-KUNG and made by him one of the *Luh-ye* or Six Arts (rites, music, shooting, riding, writing, and calculation) in the Chou dynasty (792—717 B. C.).

The nine chapters are as follows:

1. *Fang-tien* .... the calculation of field areas.
2. *Suh-pu* ...... mercantile arithmetic; measures and weights.
3. *Shwai-fên* .... method of mixing of liquids, corns, etc. At the end of this chapter is treated a problem of

indeterminate analysis, i. e. the solution of the equations

$$z = 3x + 2 = 5y + 3 = 7t + 2,$$

which is found also in *Sun-tsu-swang-king*.

4. *Shao-kang* ..... on squares, rectangles, triangles, and circles. Calculation of the sides of a rectangle from its area. Extraction of the square root. This latter introduced the solution of the quadratic equation

$$x(x + a) = s$$

whose root was found to be by trial or by a direct method

$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{s + \tfrac{1}{4}a^2}.$$

(For this, consult Prof. D. KIKUCHI's paper "Seki's method to find the length of an arc of a circle" in the *Tōkyō Sūgaku-Buturigaku Kwai Kiji*, Vol. VIII, p. 179—198).

Also in this chapter the calculation of the sides of a rectangular parallelopipedon of given volume with square base was treated and on account of this the solution of the cubic equations

$$(x + a)x^2 = v,$$
$$(x + a)^2 x = v,$$
$$\text{and } x^2(x - a) = v.$$

5. *Shang-kung* ..... calculation of volumes. The triangular (pyramidal) numbers and the arithmetical progressions.
6. *Kin-shu* .... on proportions. Problems concerning transportation of goods.
7. *Yung-Yu* .... on positive and negative quantities. A certain method to find unknown quantities by successive approximation.
8. *Fang-chêng* ..... solutions of equations. Expansion of the root into a power series of the coefficients of the given equation (see Prof. D. KIKUCHI's paper, l. c.).
9. *Kou-ku* .... on rectangles. To find one of the sides of a rectangular triangle from the other two sides. Simple land and marine surveying, by means of a rope divided by knots into three parts corresponding to the numbers 3, 4, 5. Some simple astronomical calculations.

23. In the period, the *Chou-le* (*shu-ritsu* in Japanese) and the *Fang-le* (*hō-ritsu* in Japanese) were known. The *Chou-le* means the modulus of the circle or the ratio of the circumference of a circle to its diameter, and was remembered as "diameter 1, circumference 3." Thus the value of π was 3 from a very early period. We shall find the more accurate values of π calculated by Japanese mathematicians on ensuing pages. The *Fang-le* means the modulus of the square or the ratio of the diagonal of a square to its side, and was remembered as "side 5, diagonal 7." Thus the ratio $\frac{7}{5}$ was taken as an approximate to the true value $\sqrt{2}$.

24. The simplest case of the integral sides of a rectangular triangle, i. e. the case where the hypotenuse is 5 when the other two sides are 3 and 4 respectively, is found in the *Kiu-chang-san-suh.* This Pythagorean theorem in the simplest case was proved in the following manner:

Let ABCD (fig. 1) be the square on 5 units of length, and AEFG and CLMN be those on 3 and 4 units of length respectively.

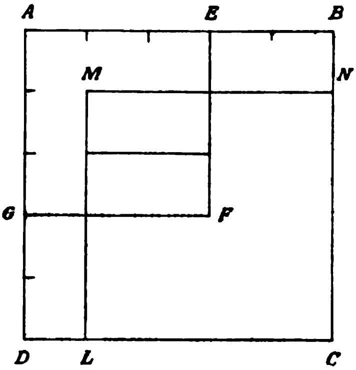


Fig. 1.

Then the square MF is evidently equal to the sum of the two rectangles EN and GL; $\therefore$ the square on AE + the square on CL is equal to the square on AB.

However the demonstration cannot be generally applied to another case; and the general integral solutions of the sides of a rectangular triangle were not known. Neither was known at that time the general Pythagorean theorem, that the sum of the squares on the two sides of a rectangular triangle is equal to the square on its hypotenuse.

Afterwards it was geometrically demonstrated for the first time by Takakazu Seki, the most famous mathematician whose life and deeds will be described later on. It is accurately written in "*Kendai-no-Maki*", one of his posthumous books,

and seems to be that which we may represent by the figure:

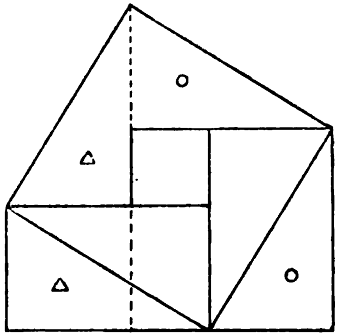


Fig. 2.

In *Sanpō-ketsugishō* Vol. 3, of YOSHINORI ISOMURA belonging to the Seki school, we find another demonstration of the same theorem, which may be represented by the figure:

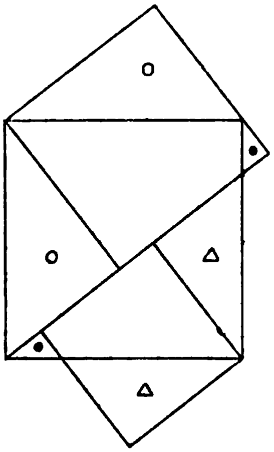


Fig. 3.

25. The Nine Chapters of Mathematics treat of almost all simple problems of arithmetic, algebra and geometry, that are common and also necessary for our daily life. It therefore seems to be a matter of course that the book was vigorously studied and investigated for so many generations.

26. The *I-fêng* calendar had been used generally for sixty-seven years. As many errors were found in the calendar in the course of years, another calendar called *Ta-yen* calendar

which was more perfect than those adopted before began to be used in the reign of the Emperor Junnin, 764 A. D. It was composed by YI-HING, a Chinese Buddhist priest, in the reign of the Emperor Hüen-tsung of the Tang dynasty of China. KIBI-NO-MABI, ambassador of Japan sent to China, had brought it to our country, accompanied by the priest, and presented it to the Emperor Junnin. The priest YI-HING († 717 A. D.) was a famous mathematician in China; he wrote *Ta-yen-lei-suh*, a book on indeterminate equations. HANKEL, in his "Geschichte der Mathematik des Alterthums", shows us that the *Ta-yen* rule for the solution of indeterminate equations is the same as the *cuttuca d'hyana* of Indian mathematics; while MATTHIESSEN in his two papers "Ueber die Algebra der Chinesen" (*Zeitschrift für Math. u. Phys.*, Vol. XIX, p. 270, 1874) and „Vergleichung der indischen Cuttuca und der chinesischen Tayen-regel" (*Sitzungsberichte der math.-naturw. Section der Verhandlungen der Philologenversammlung zu Rostock*, 1875) show us that the *cuttuca* is the method of continued fractions and the *Ta-yen* rule is the method of congruences of Gauss (*Disqu. arithm.*, § 32 – 36). The founder of the *Ta-yen* rule is sometimes said to be SUN-TSU who was an eminent Chinese of military tactics and lived in the fifth century B. C., well known among the Japanese by the name of SON-SHI.

27. The *Ta-yen* calendar had continued for ninety four years until the *Wu-ki* calendar was adopted in the second year of Tenan (858 A. D.), the Emperor Montoku. It was composed by GO-SEN in the reign of Suh-tsung, Tang dynasty, and brought to our country by HAGURI-NO-OMI-TSUBASA, ambassador sent to China. In the third year of Jyokwan (861 A. D.), the Emperor Seiwa, the *Siou-ming* calendar was used for the first time, which was composed by SHIU-KAO in the reign of the Emperor Mu-tsung, Tang dynasty, and was presented to the Japanese government by MA-HIAO-SHÊN, ambassador sent from Manchuria to Japan. Thus, the calendars which were employed in Japan had become more and more accurate; and so we can take for granted that the Japanese became gradually acquainted with complex and exact calculations. So mathematics must have undergone an improvement in the period, though it was no doubt imported from China.

28. As before mentioned, a university system was established

in the reign of the Emperor Monbū (697—707 A. D.), and literature, sciences and arts were vigorously studied. But afterwards it gradually decayed, few students entering the university, and it is said that there was scarcely one scholar studying the Nine Chapters of Mathematics. In the age of Engi (901—922 A. D.) a school was again established and there the Nine Chapters seems to have been studied once more.

29. It was mentioned above that the Emperor Tenchi invented a water-clock, and that the day was divided into twelve parts, every one of which bore the name of an animal, called Twelve Branches. In the age of Engi, the Emperor Daigo, large drums were set up in several places of the country, and the time was announced by beating it as many times as was determined for each: namely, nine for the time of *Ne* (rat), eight for the time of *Ushi* (ox), and thus, each time being less by one than the previous, four stands for the time of *Mi* (snake). The drum is beaten nine times for the *due-horse* (or noon), eight times for the time of *Hitsuji* (sheep) and thus each time being less by one than the previous, four stands for the time of *I* (boar). The reason why such curious numbers were employed to represent the time is entirely founded upon the doctrine of *Yin* and *Yang* in the Book of Changes. The numbers which represent the time are those in the first units of the products obtained by multiplying the numbers 1, 2, 3, 4, 5 and 6 by the last digit 9 which was considered as a *Yang* number. This mode of reporting time in public continued until the feudal system of the Tokugawa family had fallen. Even at present, elder people sometimes call time in this way. It was entirely abolished in the fifth year of Meiji, 1872 A. D., about thirty years ago.

30. The mathematics which was in some degree prosperous in the age of Engi fell again into decay. Only useless mathematical sports such as the *Mamako-san* or the stepchildren problem (afterwards we will state the full enunciation of this problem) were invented merely for pleasure's sake, while mathematics made little progress; but there were none who had the knowledge of the *Kiu-chang-san-suh* which was once

considered of great importance and studied vigoronsly. Nowhere in the country was to be found a doctor of mathematics, a doctor of calendar or any one who studied mathematics. In fact, the whole country was disturbed by internal disorders or civil wars breaking out incessantly in several places, and so the people did not pay any attention to learning. This dark age continued very long. There were not only very few persons who knew mathematics, but none even who devoted themselves to any kind of learning. Some literary studies were preserved by very few Buddhist priests. In the period during which the clan of Ashikaga held the shogunate (supremacy), he who knew the method of division was regarded as a very excellent mathematician. Worthless astrologers and fortune-tellers acted arrogantly and deceived the ignorant people by saying that they could tell the future fortunes or could divine the sex of the child lying in a womb by numerical calculations. Arithmetic was mistaken for a kind of mysterious astrology or fortune-telling.

31. When the clan of Ashikaga gave up the shogunate (the clan held the governing powers from 1336 A. D. to 1573 A. D.), and the two heroes Nobunaga Oda and Hideyoshi Toyotomi came to power, the art of fortification progressed very brilliantly as the necessary result of the incessant wars taking place throughout the country. The ruins of many large stately castles constructed in this period may be seen at various places even now-a-days. So the art of surveying and consequently the practical mathematics were studied, and persons skilful at solving practical problems made their appearance. MITSUYOSHI YOSHIDA was one of these; he succeeded in repairing the banks of several rivers. He may be said to be an originator of this science in Japan.

The famous rapid stream Fuji in the province of Suruga, across which the Tokaidō railway now passes, was for the first time repaired by him at the command of Iyeyasu Tokugawa, the first shogun or commander-in-chief of the clan of Tokugawa, which held the shogunate until the restoration of the year 1868.

YOSHIDA was a skilful mathematician and well acquainted with surveying especially. It was by his influence that his grandson, also named MITSUYOSHI YOSHIDA (the names of these

two men appear to be the same, but they have different Chinese ideographs), contributed to the development of mathematics which we in general call *Wasan* (or Japanese mathematics), as will be seen afterwards.

32. Hideyoshi Toyotomi who is a famous hero in the general history of Japan, having planned a Korean expedition, privately paid, it seems to us, his attention to sciences and arts. He despatched one of his subjects to China to complete his study of the Chinese Mathematics. So the importation of the Chinese mathematics again took place and the studies which were set aside during many hundred years began to flourish again. Men of talent arose in great numbers. This may be regarded truly as the beginning of the so-called *Wasan*, or Japanese mathematics, which will be described next as the third period of the history of the Japanese mathematics.

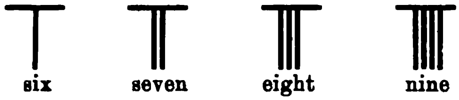
33. Before entering upon this third period, it will be very useful to describe what instruments and notations were employed in practical calculations from the ancient times to this epoch.

Since the reign of the Empress Suiko (593—628 A. D.), pieces of bamboo sticks, diameter about 0.2 cm., length 12 cm., called *Chikusaku* were used. Thereafter, pieces of wood, shaped as squarebased rectangular prisms (side of the square about 0.7 cm. and length 5 cm.), called *Sanchu* or *Sangi*, were used instead of bamboo sticks (we do not know at what time this substitution took place). But the two instruments were used altogether in the same way. In order to avoid confusion in calculations the *Sangi* is preferable to the *Chikusaku*, the former being less apt to roll as the latter when put on a table. Next we will describe how the old mathematicians used the instruments.

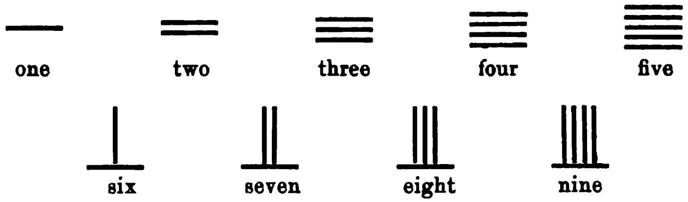
34. Besides great numbers of *Sangi*, a large sheet of thick paper or wooden board is prepared on which several lines are horizontally and vertically drawn so as to make a great number of squares, which have sides somewhat longer then the length of the *Sangi*. This is called *Swanpan*. It is quite different, though it has the same name, from the instrument which is called the Chinese *Swanpan* in an ordinary history of mathematics. In order to

represent the numbers from one to five, one, two, three, four or five pieces of *Sangi* are placed vertically in one square on the *Swanpan*; thus

To represent the numbers from six to nine, one piece is horizontally (evidently standing for five) and one, two, three, or four pieces are placed vertically in one square on the *Swanpan*, like this:

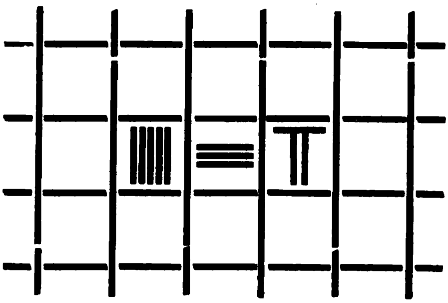


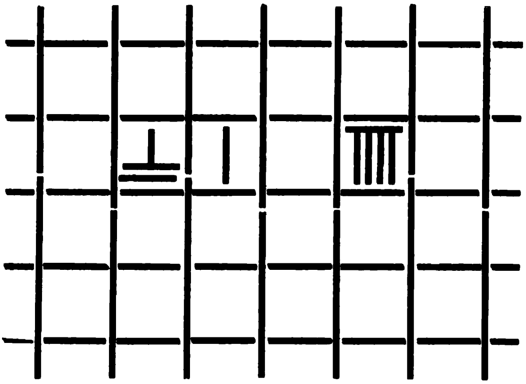
For numbers having tens and units, two horizontally adjacent squares are used; and pieces representing the number of units are put in the right square, those representing the number of tens in the left square. Three groups of pieces of *Sangi*, which have to represent numbers having three digits, are put in three squares in one horizontal row, thus: units in the right, tens in the middle, and hundreds in the left square. And so on for numbers having four or more digits. Moreover notice must be taken of the fact, that while the pieces representing the numbers in the first, third, fifth, ... places are arranged in the above-mentioned way, those representing the numbers in the second, fourth, sixth, ... places are arranged in another way, like this

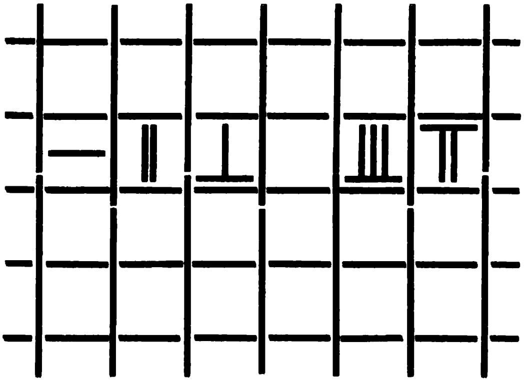


So the significant figures in different places were represented in two ways which are alternately applied according to the number of the place being odd or even. When there is no figure in a place, the corresponding place is left without being filled with *Sangi*. These facts are made clearer by the following

examples which illustrate the representation of 537, 7109, and 126087 respectively:

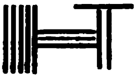




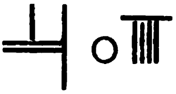


35. When it is necessary to write down on a paper the

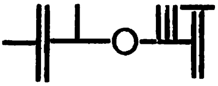
trace of the calculation with *Sangi* on a *Swanpan*, the figures in different places are represented by strokes close to one another without drawing squares. In this case, the place in which no figure occurs must have a mark. This mark is a real circle o and is never written in the elongated form 0, as in the European notation. For example:



stands for 537,



„ „ 7109,



„ „ 126087.

Moreover when the mathematicians wrote down the process of calculation on a paper, in order to represent the subtraction of a number from another, they drew an oblique stroke across the strokes representing this number to denote minus. For example:

means — 2.

„ — 7,

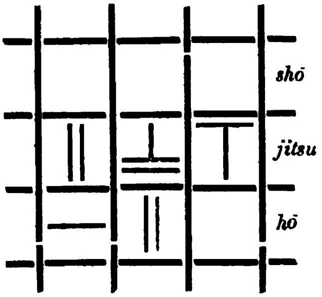
By means of such representations of numbers addition, subtraction, multiplication, division, involution, evolution, etc. were practised very freely.

36. To illustrate the methods we will describe here the solutions of some problems.

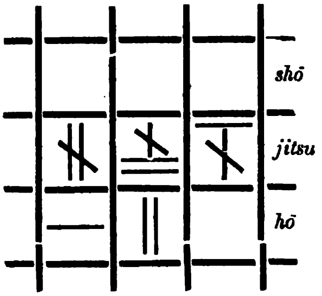
Problem I. Divide 276 by 12.

In division the divisor is called *hō*, the dividend *jitsu*, and the quotient *shō*.

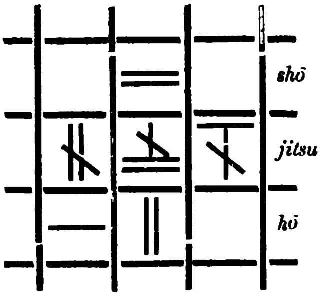
Take three horizontal rows on a *Swanpan*, and put *hō* 12 and *jitsu* 276 as in the following diagram:



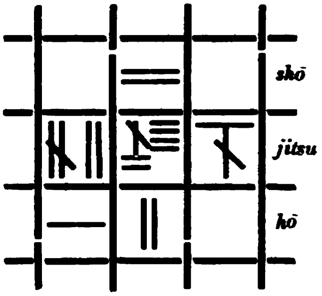
Consider the *jitsu* as negative and draw an oblique stroke across each figure constituting the *jitsu*.



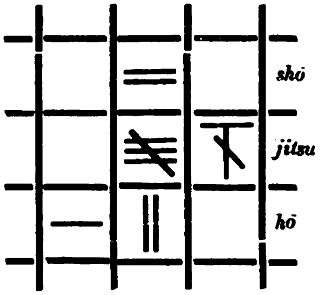
Evidently the *shō* consists of two figures, and the initial figure is 2.



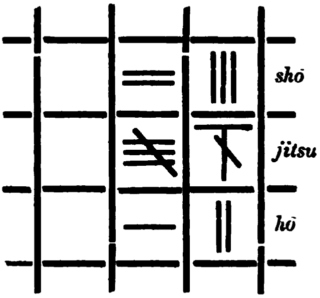
Multiply the *hō* by 20 and put the product 240 on the row of *jitsu*.



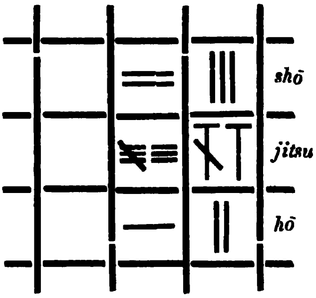
i. e.



Next in order to divide 36 by 12, change the positions of the figures of the *hō*, and write the last figure 3 of the *shō*.

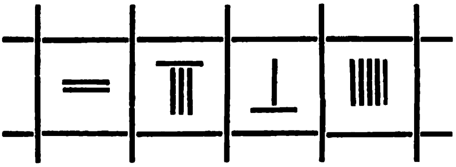


Multiply the *hō* by 3 and put the product 36 on the row of *jitsu*.

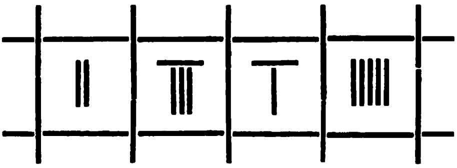


Thus we finish the operation and get the *shō* =||| or 23. This mode of operation can be somewhat contracted after some practice.

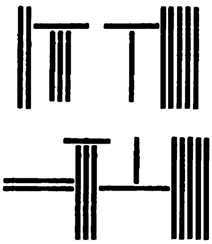
37. After some time the method of arranging *Sangi* on a *Swanpan* was changed; and the figures in the second, fourth, sixth, ... places were represented with *Sangi* in the same way as those in the first, third, fifth, ... places. Thus according to the old method, which is usually called *Son-shi-Reppu-hō*, or Method of Arrangement of SUN-TSU, the number 2865 is represented by



while according to the new method it is represented by



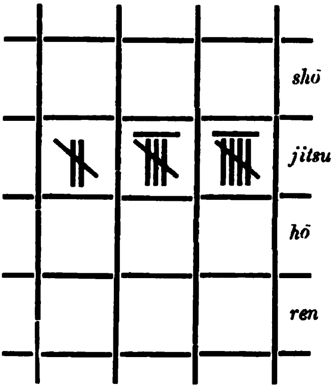
But when they write the process of the operation on paper, the mode was not changed and they did not write

for 2865, but 

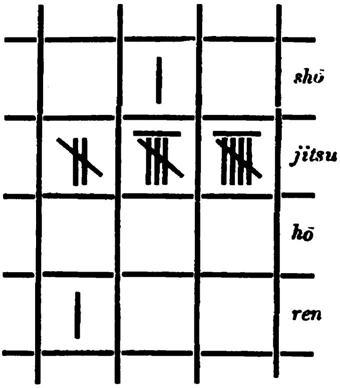
38. Problem II. Find the square root of 289.

The number of which the root is found is also called *jitsu* and the root *shō*. Moreover in evolution, the names *hō* and *ren* are used as we shall see in the following. We shall use the new mode of arranging *Sangi* in order to solve this problem.

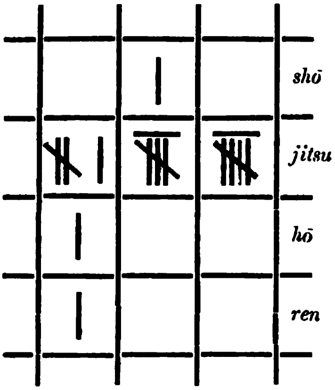
The *shō* has two figures; the initial figure is evidently 1; so



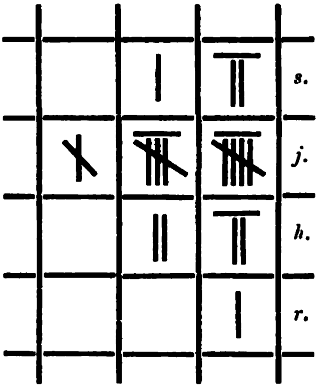
becomes



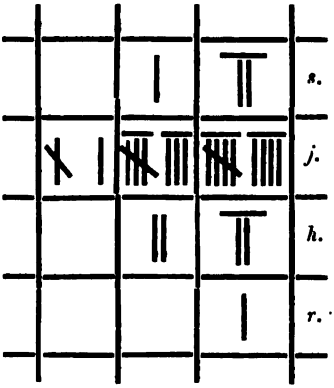
Multiply the *ren* 1 by the *shō* 1 and put the product 1 in the row of *hō*, and multiply this *hō* 1 by the *shō* 1, and add the product to the *jitsu*.

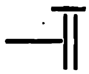


Transfer the *hō* 1 doubled one square to the right and the *ren* 1 itself two squares to the right. Try to divide the *jitsu* by the *hō* 2, get the next figure of the *shō* or 7, multiply it by the *ren* 1 and write the product 7 in the row of *hō*.



Multiply the *hō* 27 by the *shō* 7 and add the product 189 to the *jitsu*.



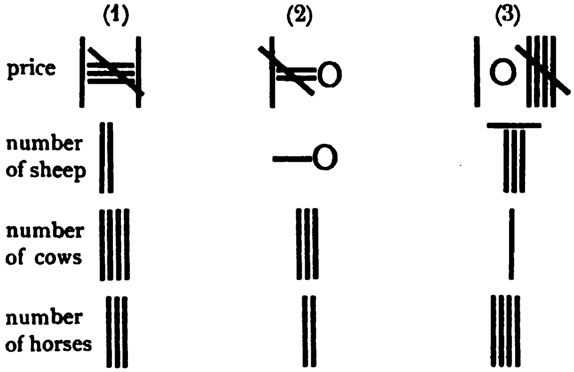
The *jitsu* becomes zero. Thus the required *shō* is , i. e. 17.

39. Problem III. The total price of three horses, four cows and two sheep is one hundred thirty one *ryō* (an old gold coin),

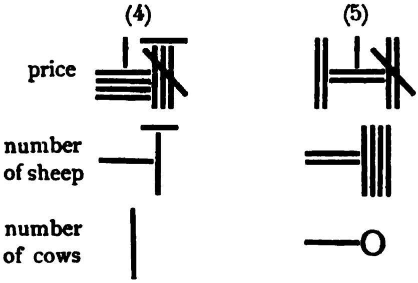
that of two horses, three cows and ten sheep is one hundred twenty *ryō* and that of four horses, one cow and eight sheep is one hundred and four *ryō.* Find the price of each of these three domestic animals.

This belongs to the problems of simultaneons equations of the first degree. The solution is as follows:

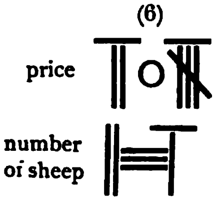
According to the meaning of the problem we have the following three simultaneons equations



Multiplying (1) by 2 and (2) by 3, and then subtracting the former from the latter we get (4); multiplying (2) by 4 and (3) by 2, and then subtracting the latter from the former we get (5).

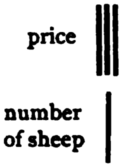


Multiplying (4) by 10 and subtracting (5) from the resulting equation we get (6).



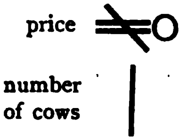
Hence dividing 708 *ryō* by 236 we get the price of one sheep, 3 *ryō*.

(7)



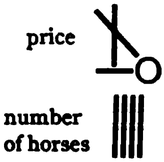
Multiplying (7) by 26 and subtracting from (4) we get the price of one cow, 20 *ryō*.

(8)



Multiplying (7) by 8, adding to (8) and then subtracting the result from (3) we get the equation (9).

(9)



Hence the price of one horse is 15 *ryō*.

This solution is nothing else than the successive elimination of the unknown quantities. The mathematicians of the old Japanese school did not use any symbol for the unknown quantity, in stead of which they used the letters or Chinese ideographs (usually in very abbreviated form) expressing the names of the unknown quantities and put them by the right-hand side of the strokes which express their coefficient. Neither was there a sign for equality, one side of an equation being always zero. Thus the above mentioned expressions (1), (2), and (3) stand for

$$-131 + 2x + 4y + 3z = 0,$$
$$-120 + 10x + 3y + 2z = 0,$$
$$-104 + 8x + y + 4z = 0,$$

where x, y, z are the required prices of one horse, one cow and one sheep respectively. The expressions (7), (8) and (9) stand for

$$-\ 3+\ z=0,$$
$$-20+\ y=0,$$
$$-60+4x=0.$$

THIRD PERIOD,

(1592—1672 A. D.).

40. We have seen that the mathematics imported from China in early times became very flourishing, but declined gradually thereafter and fell into a state of extinction so that no one paid any attention to it. When HIDEYOSHI TOYOTOMI, a famous hero known by the name of TOYOTOMI TAIKŌ in our general history, established himself the authority of Japan in 1585, he intended to import again the Chinese mathematics into our country, from the necessity of practical applications to fortification, river improvements, etc. This became in fact the cause of prosperity of the Japanese mathematics in modern times. The imported mathematics became the source of many original investigations, and great numbers of men of genius came forth successively. The period which we intend to describe here extends from the time of this importation of the Chinese mathematics to the epoch in which TAKAKAZU SEKI, the most remarkable person in the history of the old Japanese mathematics, founded his school and taught several principles of his own invention to his pupils.

41. HIDEYOSHI TOYOTOMI sent out one of his vassals, SHIGEYOSHI MŌRI, to China, then under the Ming dynasty, to study mathematics. But MŌRI was so low in rank that Chinese people disrespected him and regarded him unfit to teach mathematics. He came back to HIDEYOSHI and reported this to the latter. HIDEYOSHI promoted him in rank and sent him to China again. But the famous hero began the war against the Korean Kingdom of which the Chinese Emperor declared him-

INHOUD.

Blz.

H 2 c γ. **J. H. M. FALKENHAGEN.** Ueber das Verhalten der Integrale einer Riccattischen Gleichung in der Nähe einer singulären Stelle . . . . 209.

O 8 a, R 1 b. **F. J. VAES.** Opmerkingen omtrent de beweging in een plat vlak . . . . 249.

R 1 b a. **J. VAN DE GRIEND Jr.** Snelheidsassen . . . . 267.

Bibliographie. . . . . 284.

J. BOUSSINESQ. Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la Thermodynamique et avec la Théorie mécanique de la lumière. II. Paris, Gauthier-Villars, 1903.

M. BRILLOUIN. Propagation de l'électricité. Histoire et théorie. Paris, Hermann, 1904.

H. CHIPART. La théorie gyrostatique de la lumière. Paris, Gauthier-Villars, 1904.

J. HADAMARD. Leçons sur la propagation des ondes et les équations de l'hydrodynamique. Paris, Hermann, 1903.

P. DUHEM. Recherches sur l'hydrodynamique. Paris, Gauthier-Villars, 1904.

M. L. MARCHIS. Thermodynamique. Paris, Gauthier-Villars, Grenoble, A. Gratier et J. Rey, 1904.

E. MACH. La mécanique. Exposé historique et critique de son développement. Traduction de É. Bertrand. Paris, Hermann, 1904.

A. MACFERLANE. Bibliography of quaternions and allied systems of mathematics. Dublin, University press, 1904.

H. POINCARÉ. La Théorie de Maxwell et les ondes Hertziennes. La télegraphie sans fil. Paris, C. Naud, 1904.

V. **T. HAYASHI.** A brief history of the Japanese mathematics 296.

De redactie van het „Nieuw Archief” brengt den medewerkers in herinnering, dat met het oog op den betrekkelijk geringen omvang van het tijdschrift bijdragen van niet te groote uitgebreidheid de meest gewenschte zijn.

Alle stukken het „Nieuw Archief” betreffende gelieve men te richten aan den Secretaris der Redactie, Dr. **J. C. KLUYVER** te Leiden.

Boek-, Muziek- en Handelsdrukkerij van GEBR. HOITSEMA te Groningen.

Title Page

NIEUW ARCHIEF

VOOR

WISKUNDE

UITGEGEVEN DOOR HET WISKUNDIG GENOOTSCHAP
TE AMSTERDAM

ONDER REDACTIE VAN

J. C. KLUYVER, D. J. KORTEWEG en P. H. SCHOUTE

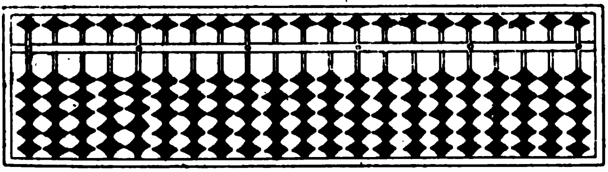
TWEEDE REEKS
DEEL VI
VIERDE STUK

AMSTERDAM
DELSMAN EN NOLTHENIUS
1905

self to be a protector. On account of this MŌRI was not the right man to accomplish his object. He returned bringing back a book called *Swan-fa-tung-tsung* written by CHÊNG-JU-SU. When he arrived at the land of Japan, the Toyotomi clan was overthrown by the hero IYEYASU TOKUGAWA, the founder of the Tokugawa family, which held the shogunate over the empire from 1603 till 1867. So MŌRI went to Kyoto where the one hundred and sixth Emperor Goyōzei resided (the castle of the Tokugawa clan was in Tokyo, which was called Yedo at that time; in 1867, the present Emperor restored the imperial government and in 1869 Tokyo became the imperial capital). In Kyoto, MŌRI hung a tablet at the door of his house, with the Chinese ideographs which mean "The First Instructor of Division in the World", and taught arithmetic and perhaps other branches of mathematics to several hundreds of pupils who gathered there from far and wide.

42. There had never been a single Japanese who wrote a book on mathematics up till this time. MŌRI wrote two volumes called *Kijoranshō* for the first time, and it was indeed the first publication of mathematical books in our country. This happened in about 1600. We regret to say that this most ancient mathematical book is not handed down to us. It is supposed to have still existed at the end of the eighteenth century.

43. We had better mention what instrument MŌRI used, before we record what operations were practiced. From China, he imported a sort of abacus which is very well known by the name *Swanpan*. We can find this name in every book on the general history of mathematics. The Japanese call the instrument *Soroban* and do not use the name *Swanpan*. Here follows the representation of the *Soroban*



Soroban.

It will not be necessary to describe the *Soroban*, and how calculations are made with it, as it is likely to be at once apparent it being not much different from other forms of abacus (see W. W. R. BALL'S "A short account of the history of mathematics", 2nd ed., p. 127). Addition, subtraction, and multiplication are executed with the *Soroban* very promptly in the same way as in the ordinary written arithmetic Division can also be performed in the same way as in the ordinary written arithmetic and indeed it is often done in that way, the method being called *Shōjohō*. But it is customary to make use of a peculiar mnemonic for division. The mnemonic may be called division-table. The method of division performed by using the mnemonic is called *Kijohō*. The *Kijoranshō* written by SHIGEYOSHI MŌRI is chiefly devoted to describe this method. As Prof. R. FUJISAWA of the Imperial University of Tokyo has read in the second international congress of mathematicians held at Paris in 1900 (see *Compte rendu du deuxième congrès international des mathématiciens*, publiés par E. DUPORCQ, p. 384) the paper written by Prof. C. G. KNOTT, formerly of the imperial university of Tokyo but now of the university of Edinburgh, and published in the *Transactions of the Asiatic Society of Japan* about fifteen years ago, giving a very lucid explanation of this mnemonic for division and of the performance of calculations on the *Soroban*, I will not enter into the details here. The *Shōjohō*, viz. the method of division by using the multiplication table in the same way as in the ordinary written arithmetic, was taught by JIHEI MOMOKAWA. This method was thereafter known by the name *Kameizan* and a book having the title *Kameizan*, 2 vols., was published in 1645 At the present time, the application of the *Soroban* is being taught in all the primary schools in Japan, as the calculations of addition, subtraction, multiplication and division are extremely easy to do with it. There is neither a bank nor a shop where the *Soroban* is not practically employed for the sake of convenience.

44. Among many disciples of MŌRI, three men MITSUYOSHI YOSHIDA, CHISHŌ IMAMURA and YOSHITANE TAKAHARA were prominent; they were familiarly known as *San-shi* (meaning three honourable scholars) among the mathematicians belonging to the

old Japanese mathematical schools. Especially the name of the first must occupy a very important place in the history of the Japanese mathematics. Yoshida (1598—1672) wrote a book entitled *Jinkōki* in 1627, which is the second of the mathematical books published in Japan and which was so popular and familiarly used that people never fail to remember the title of the *Jinkōki* whenever they tell of the *Wasan* or Japanese mathematics. He frequently published the revised editions; but none of those which were published under his direction was handed down to us, though we see some books on sale having the same title, because deceptive publications appeared in great number. In *Jinkōki* the terms *Hassan* and *Ken-ichi* can be found for the first time. These were taught till the present time, as an introduction for beginners of the arithmetic of *Soroban*. The former literally means "eight calculations" and contains the method of dividing the number 123456789 by 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, and 9, while the latter literally means "seeing one" and contains the method of dividing 1 by numbers having two or more digits; after these divisions the test was necessarily done by multiplying the divisor into the quotient.

45. The third publication of mathematical books in Japan appeared in 1639. It was entitled *Jugairoku* and written by Chishō Imamura, one of the *San-shi* mentioned above. In this book, the mensurations relative to circle, sphere, cone, etc. were described. The value of π was 3.162. In a commentary of the *Jugairoku*, entitled *Jugairoku-Kanashō*, and written by Y. Andō in 1660, this value of π was represented by the Indian value $\sqrt{10}$ wich is 3.162 +.

This accordance between the value of π and that of $\sqrt{10}$ seems to have been obtained by tentative methods of elaborate trials and verifications. In the *Jugairoku* of Imamura the area of a circle was one quarter of the product of its diameter and its circumference, and the volume of a sphere of unit diameter was 0.51, while the surface of the same sphere was one quarter of the square of the length of the circumference of its great circle, i. e. $\frac{1}{4}\pi^2$. Besides these he calculated the lengths of the sides of regular polygons from equilateral triangle to regular

decagon, given the radii of their circumcircles. The method of solving such problems was called the *Kakujutsu* (meaning method of polygons) in the *Wasan*.

46. YOSHITANE TAKAHARA, also one of the *San-shi*, did not publish any book. But as we shall see afterwards there were many persons of prominent talents among his pupils.

47. The *San shi* and their followers studied mathematics very earnestly and taught it to many people, and after this time the method of *Sanchu* which we have already mentioned in the last period was developed further and further. Many other methods of calculation and mensuration were originally invented, and the proper Japanese mathematics was founded firmly. Afterwards we shall describe only the important works which had close relation to the progress of mathematics in the country. In Mr. T. ENDŌ's history we can find the name of many mathematicians and their works; but we think the description of these persons would be very tiresome and useless in order to trace the developement of the Japanese mathematics.

48. The book which was published in 1660 by YOSHINORI ISOMURA, one of the disciples of TAKAHARA, and which has been handed down to us, is very remarkable. The title of this book is *Sanpō-ketsugishō* (five vols.). In the last volume of this book ISOMURA added one hundred unsolved problems for exercise. In YOSHIDA's *Jinkōki* we also find unsolved problems; but they were easy and not worthy of notice; but ISOMURA's problems were not so easy and attracted the attention of many men of genius. Two books were published in 1664 for the solutions of these problems, adding still more unsolved ones. Thus the habit that mathematicians who publish the solutions of the problems proposed to them by their predecessors, propose other unsolved problems to their followers, was originated at this time and continued during about one hundred years. This became an encouragement for assiduous investigations. The following four problems which are the 17th, 57th, 61st, and 97th in the *Sanpō-ketsugishō* of ISOMURA were especially famous among the mathematicians at that time.

49. Problem 17. As in figure 5 three circles are inscribed

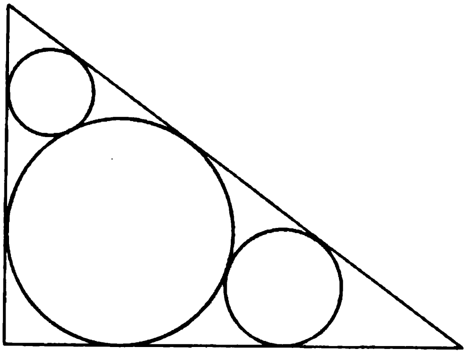


Fig. 5.

in a rectangular triangle whose two sides are known: determine the radii of the circles.

Problem 57. A rectangular box open at its top and of uniform thickness is made of a given quantity of co| per whose weight per unit volume is known; and the lengths of the edges of the outer faces of the box are given. Determine the thickness.

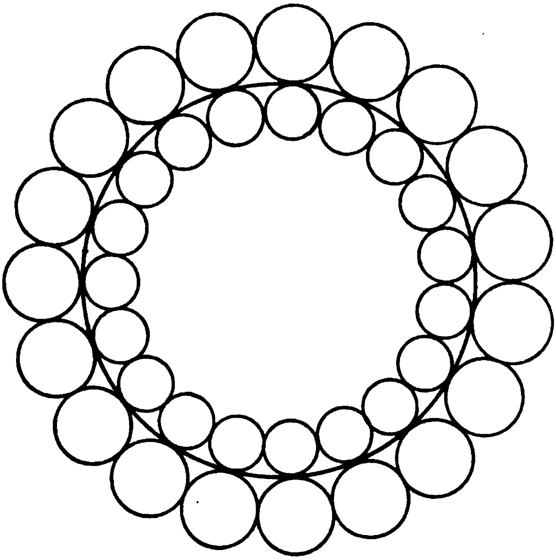


Fig. 6.

Problem 61. As in figure 6 nineteen equal circles are

described within and without a given circle along its circumference. Determine the radii of these circles.

Problem 97. There are three kinds of rice to be distributed among 625 persons. They are 1612.5 *koku* (a unit of volume), 1591.76 *koku* and 1766.1 *koku*. The 625 persons are divided into three groups, so that those belonging to the first group receive rice of the first kind, those belonging to the second group receive rice of the second kind and those belonging to the third group receive that of the third kind. The number of persons of the second group is more by 6 than that of the third group. One belonging to the second group receives more in volume by 0.58 *koku* than one belonging to the first group, and one belonging to the third group receives more in volume by 0.68 *koku* than one belonging to the second group. In such a way all the rice is distributed among these persons. Determine the numbers of persons belonging to the three groups respectively.

50. The book which we shall next describe is *Sanso*. This book was published in 1663 by Shigekiyo Matsumura who was instructed by Yasuhide Hiraga, one of the disciples of Imamura, already mentioned. Matsumura is one of the forty seven vassals dismissed from the service of the feudal lord in the Akō castle and sentenced to commit suicide in the buddhish temple *Sengakuji* near Yedo on account of killing the enemy of their lord in revenge, a famous anecdote in our general history which seems to be already known as the *Chushingura* revenge among Europeans and Americans. He was an expert in mathematics at that time, and his work *Sanso* was a commentary of *Swan-hsüch-chi-mong* written by a Chinese mathematician Chu-Shieh-chieh in the Ming dynasty, which was extremely esteemed by the comtemporary mathematicians. In this book Matsumura calculated the exact values of the radii, apothems and areas of regular polygons with given sides. As we have already told, the problems of such kind were treated under the heading *Kakujutsu*. Matsumura's results were more exact than those obtained by his predecessors. According to him, the *kō* or height of an equilateral triangle,

whose side is 1, is equal to 0.866, and the *hō* or side of a regular polygon whose radius is 5, is a follows

Number of sides.	5	6	7	8	9	10
Length of one side	5.8778	5.	4.3506	3.82683	3.4102	3.0876

Number of sides.	11	12	13	14	15	16
Length of one side	2.801586	2.5875	2.393	2.22678	2.07958	1.95093

Matsumura used 3.14 for the value of π which is more approximate to its true value than those used by Yoshida and Isomura, the former being 3.16 and the latter 3.162. But Matsumura obtained a more exact value by calculating the length of one side of a regular polygon inscribed in a circle, the number of whose sides is 32768 or 2^{15}. He obtained

0,000095873798655355 13483

for the length of the side and then

3,14159264877698869248

for the value of π which is correct to the seventh place of decimals. However, he did not use this exact value, but always used 3.14.

51. Matsumura also concluded that the volume of a sphere whose diameter is one *shaku* (a unit of length) amounts to 0.524 cubic *shaku*, by considering the sphere as a pile of elementary cylindrical layers by dividing the diameter of the sphere into four hundred equal parts and then by calculating the upper and lower limits of the volume. But it seems as if he did not know that this value is one sixth of π.

52. The values of the circumference and area of the circle

whose diameter is one *shaku* and the volume of the sphere whose diameter is one *shaku*, obtained by several Japanese mathematicians in this period, is represented in the following table.

Names of authors.	Year.	Circum. of the circle.	Area of the circle.	Volume of the sphere.
YOSHIDA	1627	3.16 shaku	0.79 square shaku	0.5625 cubic shaku
IMAMURA	1637	3.162	0.7905	0.510
YAMADA	1656	—	—	0.4934
SHIBAMURA	1657	3.162	0.7905	0.525
ISOMURA	1660	3.162	0.7905	—
MATSUMURA	1663	3.14	0.785	0.524
NOZAWA	1664	3.14	0.785	0.523
SATŌ	1666	3.14	0.7852	0.519

(About the values of π used by the Japanese mathematicians, my paper in the "Bibliotheca Mathematica", III, 3, pp 273–275 may be consulted).

53. In the *Sanso*, the two kinds of problems called *hōjin* and *ensan* respectively were treated fully. The *hōjin* problems are nothing else than the problems of magic squares. MATSUMURA described the solution of the case where the first 19^2 numbers are arranged in the form of a square. This seems to have been regarded as a very difficult problem in the period. The *ensan* problems are those which may be called the problems of magic circles. These consist of arranging the first integers

on the circumferences of concentric circles (fig. 7), so that the sums of the numbers on the same diameter and the sums of the numbers on the same circumference are all equal to each other. For example MATSUMURA solved the case where the number of diameters and the number of circles are 8 and 16 respectively.

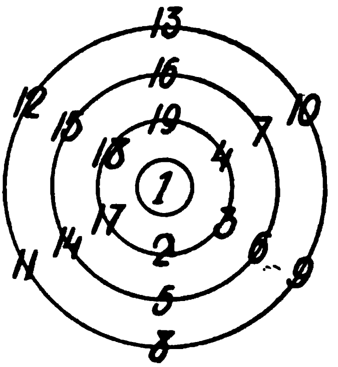


Fig. 7.

54. On such a line mathematics had been investigated till 1670, when a reformation took place Among the disciples of YOSHITANE TAKAHARA, there was a mathematician, KAZUYUKI SAWAGUCHI, who studied afterwards under the most famous SEKI, also one of TAKAHARA'S disciples. He published in 1670 a book entitled *Kokonsanpōki*, which had great influence upon the development of mathematics and entirely reformed it, so that mathematics studied up to that time got to be called mathematics in the old fashion.

The method of calculations that SAWAGUCHI demonstrated in his *Kokonsanpōki* is the so-called *Tengen* method, which was invented by CHU-SHIEH-CHIEH in the Ming dynasty of China and mentioned in his work *Swan-hsüch-chi-mong*. The method therefore was already attained by the Japanese people in about 1660; and it was regarded important and valuable as it could solve problems unable to solve by means of the *Soroban* method. The book which was published in 1666 by MASAOKU SATŌ contains the *Tengen* method too. SAWAGUCHI solved the problems that were contained in the book very skilfully by means of the method in his *Kokonsanpōki* and added some other new problems.

55. This important *Tengen* method which reformed the mathematics in Japan will be explained below.

The method is also a method in which the *Sangi* or wooden prismatic rods are used. In this method the rods are painted red or black, red ones being used for positive numbers, black ones for negative numbers. These were arranged in the

squares marked on a *Swanpan* made of paper or wood in the same way as we have already stated. When the mathematicians were requested to write down the course of operations on paper, they represented negative numbers as before by drawing an oblique stroke across the strokes representing its absolute values. The laws of signs relating to addition, subtraction, multiplication and division are quite completely enunciated. An unknown quantity is always put down as unity called *tengen-no-ichi.* In the squares on the first horizontal row of *Swanpan*, the names of several places of numbers, *man* (10000 th), *sen* (1000 th), *hyaku* (100 th), *jū* (10 th), *ichi* (unit), *fun* ($\frac{1}{10}$ th), *rin* ($\frac{1}{100}$ th), *mō* ($\frac{1}{1000}$ th), etc. are marked, and in the squares on the vertical column containing the square named *ichi*, the names *shō*, *jitsu*, *hō*, *ren*, *gū*, *san-jō* (third power), *shi-jō* (fourth power), *go-jō* (fifth power), etc. are marked. The *Swanpan*, it is supposed, entends infinitely to right and left, and to below.

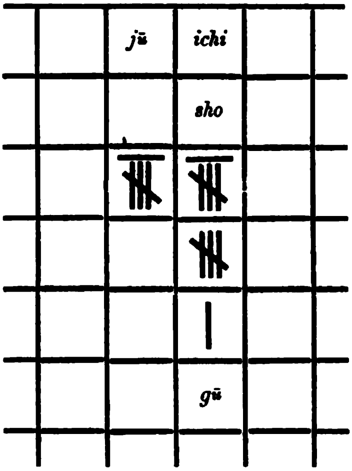
		man	*sen*	*hyaku*	*jū*	*ichi*	*fun*	*rin*	*mō*	*shi*		
						shō						
						jitsu						
						hō						
						ren						
						gū						
						san-jō						
						shi-jō						
						go-jō						

Sometimes, instead of *shō*, *jitsu*, *hō*, *ren*, *gū*, *san-jō*, etc., another way is adopted. But here we describe the most common one. The following example illustrates well how the coloured rows are used in this method.

56. Problem. The area of a *Kō-ko-gen* or rectangular triangle

is 44 square *sun* (one *sun* $= \frac{1}{10}$ *shaku*) and the *kō* or shorter side is shorter by 3 *sun* than the *ko* or longer side. Find the length of *ko*.

The length of *ko* is unknown. First, put one representing the length of *ko* (this is the *tengen-no ichi*) in the square named *ren*. Next, put -3 which is the difference of the two sides in the square named *hō*. Finally, put -88 which is twice the area of the *Kō-ko-gen*, considered as negative. Thus

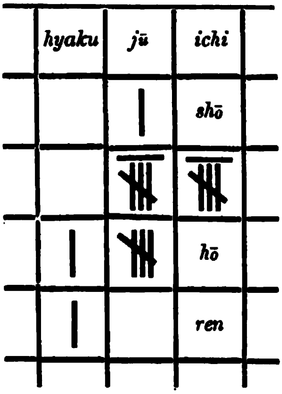


This corresponds to the quadratic equation

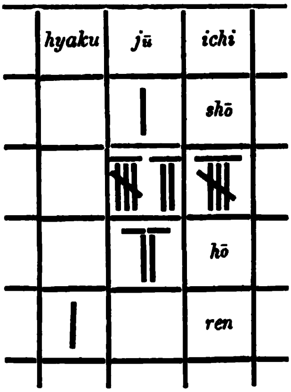
$$-88-3x+x^2=0,$$

if x stands for the length of *ko*. The operations of solving this equation are similar to those of extracting the square root of a number which we have already explained. Thus

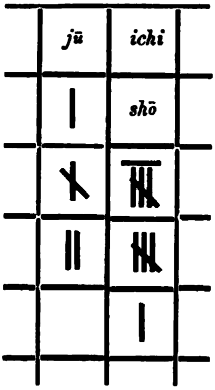
(1)



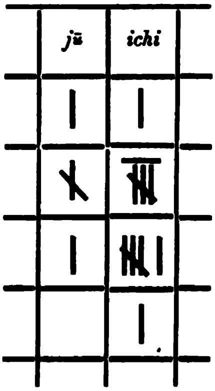
(2)



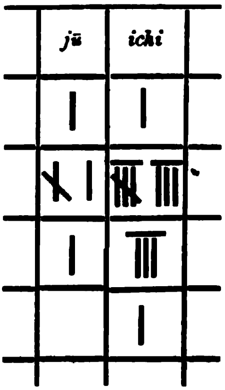
(3)



(4)



(5)



Hence the required length of *ko* = 11.

Similarly the approximate values of the roots of equations of the third or higher degree were obtained.

57. Before we close the description of this period, we should not fail to mention the most important fact, that is, the importation of the mathematics from western countries.

In the reign of the Emperor Gonara, about three hundred and sixty years ago, our country began to intercourse with western countries. We may therefore think that since that time several sciences and therefore arithmetic also were imported from those countries. But many great civil wars broke out in succession for about one hundred and seventy years since that date till the reign of the Emperor Nakamikado, which is familiar by the name of "the period of wars" in the general history of Japan; and so most people who devoted their time entirely to war affairs had learnt nothing from foreigners but gunnery, military science, and many other things necessary for battles. The art of medicine seems to have been imported with these.

When the Tokugawas, having taken the place of the Toyotomis, obtained the governing power of Japan, the Confucianism was promoted and the study of literature encouraged. However, the importation of European books was absolutely prohibited. The translators called *Tsūji* who took charge of the interpre-

tation for the government, were even forbidden to learn the European letters and to read books in European languages. They merely learnt by heart a slight vocabulary and tried to compensate imperfect pronounciation by means of gestures and mimicking of speech.

58. The first western countiymen who visited our country were the Portuguese; they arrived in the country in 1541. The Spaniards came to the country for the first time in 1581; and the Dutch in 1597; and afterwards the English and other nations came one after another. Those peoples may have come, on one hand, in order to engage in trade; and on the other hand, their object was nothing but the spread of Christianity. The Tokugawa family extremely hated the spread of the western religion and sometimes persecuted Christians. The dislike of Christianity and the fear for its growth reached its culmination point, when the government had entirely forbidden both our countrymen's intercourse with foreigners and the importation of European books. When any person was detected possessing European books, he was severely punished, his books being immediately confiscated.

By and by, western people's visits to our country decreased and only the Dutch held up the commercial intercourse with us at Port Nagasaki. The Tokugawa government never prohibited the intercourse with the Dutch and received them with rather good will. This may have been caused by the fact that the Dutch never had any ambition but the engagement in Japanese trade. During the long intercourse, our countrymen were no doubt taught sciences and arts by the Dutch. It is a thing for which we are very much obliged to that nation. The chief things our ancestors learnt from them are supposed to be astronomy, gunnery, navigation and the art of medicine. Mathematics of course must have been imported at the same time; but it is not narrated who taught the mathematics and what books were adopted to teach the Japanese. It is evident that mathematics imported by the Dutch could not make progress; for the books could not be imported, except in secret. Besides it was not until the eighteenth century that after great difficulty our countrymen grew able to read and understand books in the Dutch language. In the period that we are now

narrating, people could not read Dutch books, but we can surely believe that they learnt mathematics from the Dutch in some way.

59. In 1646, the Tokugawa government put KICHIZAEMON HAYASHI to death and imprisoned YOSHINOBU KOBAYASHI, one of HAYASHI's disciples. They lived then in the most flourishing open port, Nagasaki, and had been learning mathematics, astronomy, chronology, etc. from foreigners, probably from the Dutch. It was reported to the government by somebody that they were both Christians, and so they were sentenced to such a severe punishment. In 1667, YOSHINOBU KOBAYASHI was set free after a twenty-one years imprisonment. He was acquainted with Dutch and spoke it quite well, though he could not read Dutch books, because it was prohibited by the government to possess them. After his acquittal, he taught astronomy and chronology, and very many students assembled at his school. This may have been the origin of the spread of the European mathematics in Japan, though at that time the sphere of its influence could not be large. In 1683 he declared that many errors existed in the calendar that was then adopted in Japan and that, on the contrary, the European calendar contained none.

60. Under such circumstances the Japanese had no doubt learnt mathematics from the Dutch. But it was after a great many years that the mathematics of western countries was imported and learnt by the natives with great enthusiasm. It will be narrated in a different place and we shall proceed to the next period in which the mathematics peculiar to Japan is to reach its highest point of flourishing.

FOURTH PERIOD.

(1673—1771 A.D.).

61. In the third period the Chinese mathematics was imported and thoroughly investigated. In consequence of this,

Japanese mathematicians arrived at many new mathematical methods and truths by their own invention. The invention of the *Tenzan* method and the *Enri* method by TAKAKAZU SEKI, a disciple of TAKAHARA's, should be especially noticed. Some mathematicians, as mr. T. ENDŌ, admiring the *Enri* method, consider it not inferior to the infinitesimal calculus invented by NEWTON and LEIBNITZ. By this method rectification, quadrature and cubature can undoubtedly be properly performed. On the other hand Prof. R. FUJISAWA, of the Imperial university of Tokyo, says that the method is far inferior to the Calculus, as it much resembles the methods existing before the invention of the Calculus.

62. TAKAKAZU SEKI was the most superior of old Japanese mathematicians. Persons who feel interested in the Japanese mathematics (we commonly call it *Wasan*) will not fail to keep his name in memory. SEKI's pupils had kept up the school and had taught mathematics until lately, putting the sign of the Seki school at the entrance. Though not many, there still exist mathematicians belonging to the Seki school. There were many other schools as we shall see afterwards, but none of them was as prosperous as the Seki school.

63. SEKI was born in 1642 in Fujioka, a small town in the province of Kōzuke. He became a financial official of the Tokugawa shogoon's government. He died in Tokyo (then called Yedo) in 1708. Even when a small boy, he was skilful in arithmetic and often detected errors made by adults in operations. He studied mathematics and invented himself several methods and truths of mathematics. The *Tenzan* method and the *Enri* method are his chief inventions. He wrote a great number of mathematical books, most of which are manuscripts.

64. As was mentioned in the last period, the *Tengen* method which CHU-SHIEH-CHIEH invented in the reign of the Ming dynasty of China, was already attained by men of *Wasan*. Taking this mode as a basis, SEKI contrived a method called *Endan*, by which solutions could be more easily understood than by the *Tengen* method. It was no other than an improved

form of the *Tengen* method. MITAKI and MIE, disciples of SEKI, published it in bookform for the first time in 1674.

SEKI invented the *Tenzan* method after his invention of the *Endan* method. The *Tenzan* method may be called in short the universal arithmetic, and it moreover contained geometrical problems.

SEKI taught several students the calculation on the *Soroban* first, and then the calculation in the *Sanchu* method. After this having been finished, he taught the *Tengen-Endan* method. The *Tenzan* method and what followed was not to be taught to common students and only some of them, the most excellent of all his students, were allowed to teach. They might not readily teach the methods to other persons either. In such a way, the methods were handed down to a few people only.

64. SEKI's students were divided into five classes; and the students of the higher classes had to study the higher parts of mathematics. He gave the diploma, called *Kendai-menkyo* to the graduates of the first class, the diploma *Indai-menkyo* to the graduates of the second class, the diploma *Fukudai-menkyo*, to the graduates of the third class. People who had these three diplomas were extremely few in number. The three classes were also called the ranks of *Hihō-menkyo.* The other two higher classes were named the *Betsuden* and the *Inka.* They were not readily taught; and as for the *Inka*, one of the teacher's sons and two of his best pupils only were allowed to study it, keeping it entirely secret from others. The copies of the diplomas corresponding to the five classes are mentioned in the seventh volume of the *Tōkyō Sūgaku-Buturigakkwai Kiji*, p. 127—138.

65. Investigating SEKI's *Tenzan* method, we know that it was just like the universal arithmetic and its chief object was the solution of equations. The Japanese write a sentence longitudinally beginning at the top of the paper to the right and ending at the bottom to the left, just as the Chinese do. And so they wrote longitudinally algebraical expressions and equations on a paper in the *Tenzan* method. In the *Sanchu* method, several strokes were put horizontally and vertically in order to represent a number; but in the *Tenzan* method, the Chinese

ideographs were employed for the figures and they were written on the right-hand side of one vertical stroke. It was called *Bōshohō*. Now, if we apply the arabic figures 1, 2, 3, 4, 5, ... instead of the Chinese ideographs representing numbers, the numbers are represented as follows:

|1 |2 |3 |4 |5 .....

For example, |3 and |123 stand respectively for 𝍢 and 𝍠𝍪𝍢 in the *Sanchu* method. This *Bōshohō* (meaning method of writing side by side) served very much to develop mathematics, as it is a very simple way of writing numbers. The Chinese ideographs were applied to represent known or unknown quantities, as the letters of the alphabet in algebra. They were a group of words which are called ten stems already mentioned and whose Japanese pronunciations are *kō*, *otsu*, *hei*, *tei*, *bō*, *ki*, *kō* (having the same sound as the first, but not the same form), *shi*, *jin*, *ki* (not the same form as the sixth). Let us employ alphabets instead of these Chinese ideographs and show a few examples

(1)

|*a*.3 or 𝍢*a* means $+3a$.

(2)

a.6 or *a* means $-6a$.

(3)

|*a*
|*b* is the sum of *a* and *b*, $= a + b$.

(4)

is the difference of *a* and *b*, $= a - b$.

(5)

|ab is the product of *a* and *b*, $= ab$.

(6)

b|*a* is the quotient of *a* and *b*, $= \frac{a}{b}$.

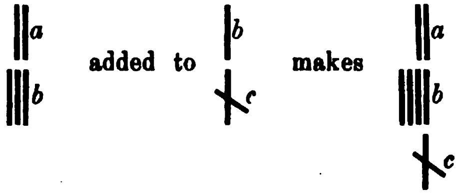
(7)

3|*a*2 is $\frac{2}{3}a$.

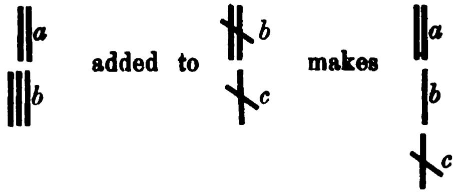
At that time, they had no sign of equality, expressing the sense in words.

66. Examples of addition, subtraction, multiplication, and division are shown below

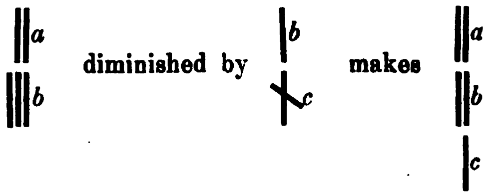
(1)



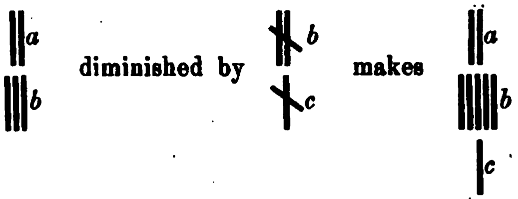
(2)



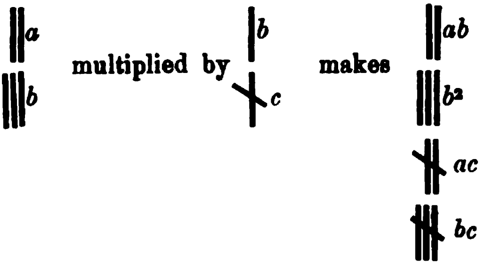
(3)



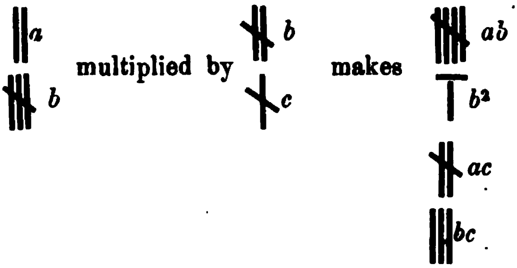
(4)



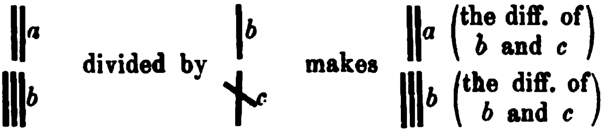
(5)



(6)



(7)



The so-called *Tenzan* method I shall explain here, solving by that method some simple problems.

67. Problem. The sum of prices of 24 *tō* (a Japanese capacity which is about half a *bushel*) of the better rice and 30 *tō* of ordinary rice is 4 *ryō* (a Japanese gold coin which

has circulated in the old time). If the latter is 3 *tō* per *ryō* cheaper than the former, how much are the two rices sold per *ryō*?

Let x be the number of *tō* that the better rice is sold per *ryō*; and let y be the number of *tō* that ordinary rice is sold per *ryō*. Chinese ideographs which mean the better rice or the ordinary were of course employed instead of x and y.

In such a case, in order to represent the unknown quantity, the name of a thing wanted is written, or a term of the Ten Stems or the Twelve Branches was sometimes used.

(1)

|x and |y are required.

(2)

|x
|3 is equal to |y.

(3)

x|24
y|30 is equal to |4.

(4)

x|24
y|30 (*Kugō* means "is equal to zero").
⟊4
Kugō.

Multiplying every term by xy, namely first by |x and secondly by |y or |x |3,

we get

(5)

| x.24
| 72
| x.30 (This is $24x + 72 + 30x - 4x^2 - 12x = 0$).
| x^2.4
| x.12

Kugō.

From this, to find x:

(6)

72		36
x.42	or	x.21
x^2.4		x^2.2
Kugō		*Kugō.*

Omitting x and x^2 (this is not commonly the case)

(7)

| 36
| 21
| 2

Kugō

According to the *Tengen* method, the *ren* is 2, the *hō* 21, and the *jitsu* 36.

(8) Squaring $\frac{hō}{2 \times ren}$ and adding 2|36 we get 16|729. This is called the *hei-seki*.

(9) Finding the square root of 16|729 wich is 4|27.

(10) Adding this square root to one half of the *hō* divided by the *ren*, we get

2.2|21
or 4|48 or |12.
4|27

(11) Subtracting this square root from the half of the *hō* divided by the *ren*, we get

2.2|21
or 4⟍6 or 2⟍3.
4⟍27

The former is the proper answer while the latter is not; and therefore the better rice is sold 12 *tō* (or one *koku* and two *tō*) per *ryō*.

Investigating the method, we know that it is the same as the solutions of equations of the second degree with one unknown quantity in algebra, in which the equations are solved by making perfect squares and then by finding two factors (the sum and the difference of two quantities). Applying the same method, it was possible to solve equations higher than the third degree.

68. If often happened that by solving equations in the way mentioned above results were obtained which do not all satisfy the conditions of the problem, or sometimes imaginary quantities were obtained. So the real roots were called by the name of *U-shō*, and the imaginary roots by the name of *Mu-shō*.

69. Since Takakazu Seki invented the *Tenzan* method or algebra, he applied it to several problems. He treated problems pertaining to maxima and minima. He obtained the binomial theorem for integral and fractional indices, and investigated the arithmetical and the geometrical progressions. Proceeding farther, he treated the power series, though he did not mention the divergency and convergency of the series. At last, by means of this method, he attained the notion of infinitesimals. Though it may be too much praise that some old Japanese mathematicians or *Wasan-ka*, being greatly proud of it, compared it to the infinitesimal calculus of Newton and Leibnitz, the quadrature and the cubature were operated by that means

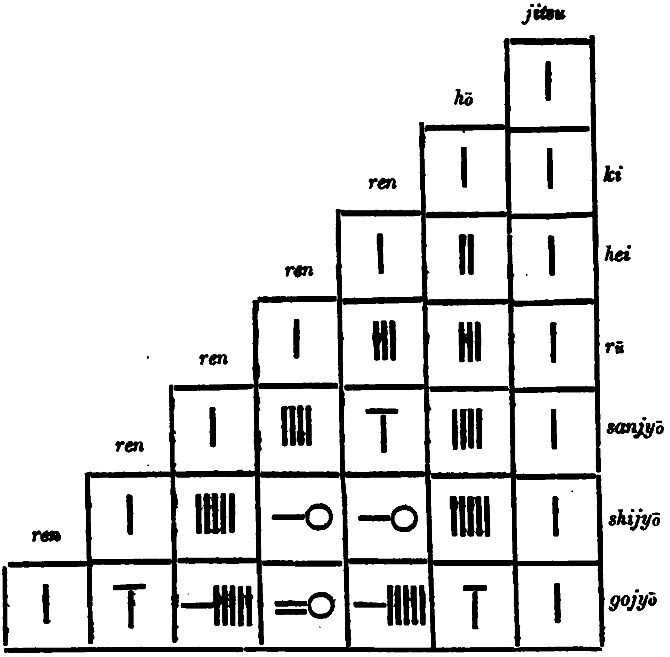
without difficulty. This method was called the *Enri* method, which will be explained in a different period in which the deeds of mathematicians belonging to the Seki school are narrated.

SEKI had arrived at such important results, but possessed no son with talent enough to hand these down. (It was then a custom that such things were handed down as secrets to a son). He had, however, several hundreds of pupils, among whom were some mathematicians of talent enough to continue his great work. MURAHIDE ARAKI, KATAHIRO TAKEBE and others are the most excellent of them all. SEKI invented himself several mathematical methods and truths which he could not arrange and systematize, as he died before he could do so. The two disciples, ARAKI and TAKEBE, arranged his inventions and rendered the Seki school so prosperous that the other schools never had such an authorithy on mathematics as the Seki school; and this was justly due to these two disciples. We shall now narrate the deeds of these two mathematicians.

71. MURAHIDE ARAKI first learned mathematics under YOSHITANE TAKAHARA like TAKAHAZU SEKI, and afterwards became a disciple of SEKI himself. He was respected by the other disciples, being the most superior of SEKI's great number of pupils. He was looked upon as being the principal man to succeed SEKI at the school. Dividing the higher substance of SEKI's results into seven parts, he compiled the famous SHICHIBUSHO or Seven Books, which was of course not published. The contents of the books were not easily shown, it being almost entirely kept secret. Afterwards, YOSHISUKE MATSUNAGA, the best disciple of ARAKI, handed the Seven Books down only to the most eminent disciple who had got the diploma of the so-called *Inka-Kaiden*. At present, any person is able to learn the books which are handed down to us in manuscripts. One of them is contained in my library.

72. The names of the Seven Books are as follows:

I. *Kaihō-Honpen*. This discusses the roots of equations, positive or negative, real or imaginary, which are obtained by solving the equations by means of the *Tenzan* method. Besides, this contains the table of the binomial coefficients, like PASCAL's triangle.



II. *Byōdai-Meichi.* This treats of a mode of recognizing whether there exists any objectionable point (such as too many conditions for determining the unknown quantities, or too few) to obtain the proper results, and of examining the conditions of a given problem.

III. *Daijitsu-Bengi.* This explains the reason why a problem may be impossible and has therefore a close relation to the second book.

IV. *Hōjin-Ensan.* Composition of magic squares and magic circles.

V. *Sandatsu-Kenpu.* Solutions of a kind of problem called the Stepchildren problem and another kind called the *Metsukeji*.

The Stepchildren problem is founded on the following story: "Once there lived a rich farmer who had by his first wife fifteen children, and by this second wife fifteen others, — in all thirty. His second wife made a proposal to him in order that one of her own sons might succeed to her husbands estate. Her proposal was, that all their thirty children were made to stand

alternately in the circumference of a circle, on which no two of her own sons were to stand side by side; and beginning to count with a certain boy, the children who were the tenth, the twentieth, and so on, were to be put aside; and the one who was left was to be his successor. The farmer accepted her proposal. In the course of the operation they found that all her own fifteen children remained with only one of her step-children. In this way the step-mother became assured that, in whatever manner they continued counting, one of her own sons would be successful; and now they counted in the opposite direction beginning with the step-child putting aside the tenth, the twentieth, and so on. At last, all the children were taken away, except the one step-child who succeeded duly to his father's estate."

The *Metsukeji* problem is a mathematical sport game in which a number of cards bearing a quantity of letters, arranged according to a certain rule are shown, and one has to hit upon the letter that is in another's memory.

VI. *Kyūketsu-Hengyōsō.* A collection of problems of a certain mensuration relating to spherical segments.

VII. *Kyuseki.* A process of finding surface-areas and volumes of polyhedrons, cylinders, cylindrical frusta, spheres, cones, and so forth. This part like the sixth being looked upon at that time as very difficult, several mathematicians concentrated their efforts on investigating it and so effected its improvement. We should not fail to mention that the ground-rule of finding the centroid of a plane figure happened to be found in the investigation.

73. In 1709 Murahide Araki induced his pupil Yoshimasa Ota to write a book entitled *Kwatsuyo-Sanpō*, containing different problems as many as he could find, and their solutions by means of the *Endan* method. The *Tenzan* method was not to be described in the book, because it was to be kept strictly secret. But this book was regarded as the key of the study of mathematics, because it could afford much convenience to the readers. It is stated in the book how, when the length of the side of a regular polygon with a great many sides is given, the exact length of the radius of the

circumscribed circle is to be found. It contains also the discussion of the value of π. Round a circle one *shaku* (about one foot) in diameter is successively circumscribed a regular polygon whose sides increase in number thus: 4, 8, 16, 32.... until $131072 = 2^{17}$ sides; and calculating the length of its side, the value of π is obtained to the tenth decimal. Namely, the value of π was settled at 3,14159265359..... We remember that ISÔMURA did not state to which decimal the value of π which he found was correct. But ARAKI assures that the value of π which he obtained himself begins to differ from the true value at the eleventh decimal. This was a progress. It was mentioned first in the book that the value of π is to be obtained by $\frac{355}{113}$, correct to the seventh decimal. As to the process of obtaining the ratio $\frac{355}{113}$, an interesting thing is written here. We have first $\frac{3}{1} < \pi$ and then we add 4 and 1 respectively to the numerator and the denominator of $\frac{3}{1}$ and then we get $\frac{7}{2} > \pi$. Then 3 and 1 are added to the numerator and the denominator of $\frac{7}{2}$ respectively and so we find $\frac{10}{3} > \pi$. Again 3 and 1 are added to the numerator and the denominator of $\frac{10}{3}$ respectively and then $\frac{13}{4} > \pi$ is obtained. So it is repeated a good many times that either 3 and 1 or 4 and 1 are added to the numerator and the denominator of the preceding fraction, according to its being more or less then π. In this way the following series was constructed:

$$\frac{3^*}{1},\ \frac{7}{2},\ \frac{10}{3},\ \frac{13}{4},\ \frac{16}{5},\ \frac{19}{6},\ \frac{22}{7},\ \frac{25}{8},\ \frac{28^*}{9},$$

$$\frac{32}{10},\ \frac{35}{11},\ \frac{38}{12},\ \frac{41}{13},\ \frac{44}{14},\ \frac{47^*}{15},\ \frac{51}{16},\ \frac{54}{17},$$

$$\frac{57}{18},\ \frac{60}{19},\ \frac{63}{20},\ \frac{66}{21},\ \frac{69^*}{22},\ \frac{73}{23},\ \frac{76}{24},\ \frac{79}{25}\ldots.$$

The fractions less than π are marked with asterisks. The value $\frac{355}{113}$ was then found as the 113th term of this series.

We remark that this algorithm cannot lead to an evaluation of π, as π is supposed to be known in order to decide at every step if either 3 or 4 is to be added to the denominater. But what strikes us is this that several values of π, which were used by the Chinese, occur in the series. The 7th term $\frac{22}{7}$ which is the Archimedian value, is the "inaccurate value" of TSU-CHUNG-CHI of the Sung dynasty. The 8th term $\frac{25}{8}$ which agrees with the value attributed ordinarily to VITRUVIUS, was used by another Chinese mathematician (I do not know his name, nor when he lived). The 20th term $\frac{63}{20}$ is the value of TUNG-LENG and the 25th term $\frac{79}{25}$ is that used by the Japanese before SEKI, as I have already mentioned. The 45th term $\frac{142}{45}$ is due to LUH-TSIH, and the 50th term $\frac{157}{50}$ to LEW-HWEI, of the Tsin dynasty. But it is curious that there was none who noticed the 36th term $\frac{113}{36} = 3.14166\ldots$ which is more exact. The value $\frac{355}{113}$ is also said to be the "accurate value" of TSU-CHUNG-CHI.

The reason why the curious method of forming the above series was employed in order to obtain $\frac{355}{113}$ is not entirely known. This is said to be one of SEKI's inventions. (For the values op π used by the Japanese mathematicians of the 17th and 18th centuries, see my paper in *Bibliotheca Mathematica*, III Folge, III (3), p. 273—275).

74. The modulus of the sphere is found in the book by the same method as was before mentioned. A sphere one *shaku* in diameter is found to be the $523\frac{203}{339}$ cubic *sun*

$\left(\frac{1}{10}\ \textit{shaku}\right)$ in volume, and it is for the first time mentioned that its value is $\frac{\pi}{6}$, being equal to $\frac{355}{678}$. This is also said to be one of SEKI's results. Before this, ISOMURA decided that the modulus of the sphere is $\frac{\pi}{6}$ without demonstration. The mentioned book contains also that the numerical value of the area of a circle one *shaku* in diameter is one-fourth of the numerical value of its circumference, namely, one-fourth of π. Those values were all obtained by means of the *Enri* method which had to be kept quite secret, but in the book they are calculated in an extremely tedious way by means of the *Endan* method, while nothing is written about the *Enri* method.

75. ARAKI arranged his master SEKI's results as well as possible and died before he entirely finished it. YOSHISUKE MATSUNAGA who, having completed the whole course of instruction, was given the certificate by his master. MATSUNAGA had arranged and systematized SEKI's results, following his master's example, and got it in perfect order for the first time.

76. KATAHIRO TAKEBE was one of the best pupils of SEKI's, just like ARAKI. He had two brothers, KATAYNKI TAKEBE and KATAAKI TAKEBE who were also superior pupils of SEKI's; but it is said that they were much inferior to their brother KATAHIRO. He became an officer of the eighth shogoon, Yoshimune Tokugawa, (he was in the shognate from 1716 to 1744) and was appointed to survey astronomy and calendar-making. He calculated a transit of Venus in Yedo 1718.

He published a book entitled *Kenki-Sanpō* in which he explained the *Tengen* method. It contains some problems which cannot be solved without applying the *Tenzan* method or the *Enri* method; in this case, he mentions merely the enunciations and the answers without proceeding to the solutions. He published 1685 a book *Hakkisanpō-Yendangenkai* which explains SEKI's *Endan* method, by which the then living generation profited much. He published also a book entitled *Fukyu-Takebe's Tetsujitsu* in 1722, which contains his new results. TAKEBE's

Tetsujitsu differs entirely from the *Tetsujitsu* which SEKI found and it is doubtful whether it is the same as the *Tetsujitsu* (*Tio shu* in Chinese) which TSU-CHUNG CHI in the Sung dynasty of China composed In this book the modulus of the circle, that is the value of π, is calculated by a certain method as far as the forty-first decimal. An interesting method of finding the surface area of a sphere, which is different from those applied up to that time, is contained in it.

77. KATAHIRO TAKEBE, revising SEKI's posthumous work, compiled a book entitled *Enri-Kohai-Tetsujitsu* containing the most profound principles of the Seki school. It was a manuscript, not a printed book. The chief problem stated in it runs as follows: As in the figure, "twochords" are inscribed in a circular segment, then "four chords", "eight chords", etc.; required to find the respective sagittae; that is: the original arc is bisected and then bisected again, and so on; required to find the sagittae of the respective arcs.

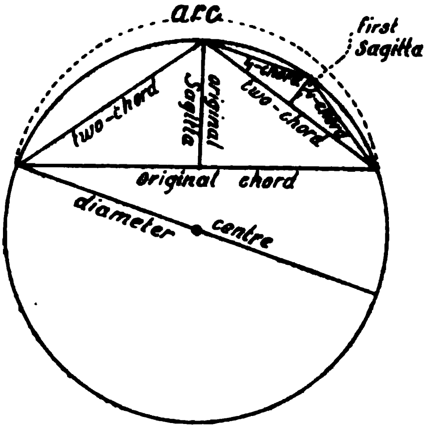


Fig. 8.

It is clear how much pains SEKI took about this problem; and readers who wish to know SEKI's solution of this problem are requested to read Prof. D. KIKUCHI's already mentioned paper (*The Tōkyō Sūgaku-Buturigakkwai Kiji*, Vol. VIII, p. 179—198.)

MURAHIDE ARAKI was SEKI's proper successor, who completed the whole course of SEKI's mathematics and received the diploma of the *Inka-Kaiden*. But KATAHIRO TAKEBE did not receive the diploma His talent, however, caused him to attain the part of SEKI's mathematics which was kept secret. He one day happened to get a written book of SEKI's from the adopted son of the latter (not a mathematician); and revising it, he compiled a manuscript book which is now transmitted

to us. Of course he kept this manuscript secret more strictly still, and showed it only to his best pupil, GENKEI NAKANE, who showed it also to his best pupil only; and others were never permitted to learn it. He was born in Yedo in 1664 and died in 1739.

78. We have now to narrate about the studies of YOSHISUKE MATSUNAGA, ARAKI's best pupil, and GENKEI NAKANE, TAKEBE's best pupil. We shall begin with the latter who died before the former.

79. GENKEI NAKANE (1661—1733) was so skilful in mathematics that he frequently surprised his master. He was versed not only in mathematics, but also in calendar-making, and so he possessed many works on mathematics and the science pertaining to calendars. The calendar composed by him is said to be a very accurate one. It is also to be admired in him that he evaluated correctly the period of years since the Emperor Jimmu. There were but few Japanese mathematicians, who had not studied chronology, because they took the calendar-making as an application of mathematics. Since the *Sion-ming* calendar, which SHIN-KAO composed in the Tang dynasty of China, was adopted in 861, as was mentioned before, it had continuously been used for several hundred years in Japan; while in China this calendar was set aside and several calendars were successively adopted. Some Japanese mathematicians began to notice the fact that the *Sion-ming* calendar ought to be changed. SHUNKAI YASUI insisted upon the necessity of changing the calendar in 1673. He was born 1639 in Kyoto, and went to Yedo to study the chronology under MASATOMO IKEDA. He became thoroughly acquainted with the calendar-making having much investigated it himself. With a view to this fact, he was much respected by his generation. He in 1680 composed a calendar called *Nihon-chōreki* which was at last adopted by the government; and the festival day of Ise shrine, where the Imperial Ancestor is placed and worshipped, was settled according to the calendar. He proposed to the government in 1684 that the calendar had of necessity to be changed. This was urged by the fact that though according to the *Sion-ming* calendar a solar eclipse was

to take place no eclipse appeared at all. At that time things pertaining to the calendar were entirely in the hands of the Tsuchimikado family; and private hindrance was powerful and made it very difficult to get the calendar changed. In 1684 the government was at last obliged to abolish the *Sion-ming* calendar and to adopt the *Ta-tong* calendar composed by the astronomical institute of the Ming dynasty of China. But much to YASUI's disappointment, he had to insistu pon the revision of the calendar as it was impossible to adopt it in our country, it being made in China, on account of the difference in latitude and longitude. The Tsuchimikado family, having accepted his proposal, decided to publish YASUI's new calendar, gaining permission of the government which afterwards gave the calendar the name of *Teikyō*. This was the first calendar adopted in Japan that was composed by a Japanese calendarist. SHUNKAI YASUI was made an officer of the astronomical observatory by the fifth shogoon, Tsunayoshi Tokugawa. He resided in Yedo, and occupied himself day and night with the observation of heavenly bodies. And the calendars which were yearly published ,over the country were made in Yedo, while the Tsuchimikado family in Kyoto took nominally charge of the compilation of the calendars. (The Japanese calendar usually contains, metereological phenomena and weather-forecast for the whole year). YASUI made an astronomical map, showing three hundred and sixty one constellations and the positions of seventeen hundred and seventy three stars. He gave names to the constellations and made a celestial globe. Telescopes which were employed at that time were defective and made observation of stars only from the first class to the fifth possible. He changed afterwards his family name into SHIBUKAWA, and so he is sometimes known by the name of SHUNKAI SHIBUKAWA. He died in Yedo in 1715.

GENKEI NAKANE constructed by his own invention a mechanism which makes a bell ring fifteen times a year, turning a celestial globe by means of a clock-work. It was already mentioned that his master TAKEBE was in the service of the shogoon Yoshimune Tokugawa; with him he observed a transit in Yedo very correctly. The next year, 1719, the shogoon commanded JOKEN NISHIKAWA to come from Nagasaki to Yedo, where he was employed with the compilation of calendar and astronomical

observations. It was the first adoption of European calendar-making, though it might privately have been used among our countrymen before that. NISHIKAWA learnt it from Europeans, perhaps from Dutchmen in the most flourishing open-port. It is not known what calendar it was, or what countrymen acquainted them with it. We can, however, without doubt be assured that it was imported by Dutchmen who had the closest intercourse with us at that time.

80. We shall now proceed to YOSHISUKE MATSUNAGA who was the proper successor at the Seki school. The dates of MATSUNAGA's birth and death are quite unknown. It was in 1716 when he published his first work, containing the process of finding the total sum of the numbers in progression, arithmetical and geometrical. In 1723, he published again a book pertaining to the numbers in progression. He published in succession several books relating to theories and applications. He amplified and revised the three parts of SEKI's Seven Books (*Kaihō-Honpen*, *Byōdai-Meichi*, *Daijitsu-Bengi*, see before), and published it in 1745. The followers of the Seki school are greatly indebted to him, because he arranged in a perfect manner SEKI's manuscript books which were handed down to him by ARAKI, his master. ARAKI systematized SEKI's results, but not completely; and at last it was thoroughly arranged by MATSUNAGA in regular order, so that his pupils could be regularly taught. The diplomas of the two highest classes, that is *Betsuden* and *Inka*, were added by him, and so the five diplomas were instituted by him for the first time. A student could not be said to have completed the whole course of mathematics of the SEKI school, unless he had gained these five diplomas one by one in regular order. The two highest diplomas were then set at great value, and those who had received the diplomas were supposed to have learnt the most profound parts of the Seki mathematics. That the other schools had far less authority than the Seki school was merely caused by the fact that they had not the secrets taught in these two classes of the Seki school.

MATSUNAGA demonstrated minutely the process of finding the area of circular segments and the length of circular arcs; he added some other problems which had been solved by means

of the *Enri* method and compiled seven volumes which he named *Kenkon-no-maki*. The theory of the length of arcs (see Prof. D. KIKUCHI's paper in the *Tōkyō Sūgaku-Buturi-gakkwai Kiji*, Vol. VII, p. 107—110, where the *Kenkon-no-maki* is said to have been written by YAMAJI, the best pupil of MATSUNAGA) was regarded as the most important of all the contents of the book. It much resembles TAKEBE's *Fukyu-Tetsujitsu* and differs only in the method of finding the approximate values of the lengths of arcs. As to TAKEBE's method, Prof. D. KIKUCHI published its faithful translation in the *Tōkyō Sūgaku-Buturigakkwai Kiji*, Vol. VIII, p. 179—198. The readers of the paper are enabled to understand the general feature of MATSUNAGA's method too. For shortness sake, we do not intend to describe here the difference between the two limiting processes; we shall await another opportunity to deal with it minutely.

MATSUNAGA obtained series representing π and π^2, having evaluated the lengths of circular arcs. In his *Hōen-sanpō* (a manuscript) which was published in 1739, the value of π is represented by the following hypergeometric series:

$$\pi = 2\sqrt{2}\,F(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}).$$

This is the series which can be obtained from the expansion of ϕ in powers of $\sin\phi$, that is:

$$\phi = \sin\phi + \frac{1}{2}\,\frac{\sin^3\phi}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{\sin^5\phi}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{\sin^7\phi}{7} + \ldots,$$

by making ϕ equal to $\frac{\pi}{4}$. By means of this series, the value of π is exactly obtained as far as the fiftieth decimal.

The series for π^2 is

$$\pi^2 = 8\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1.2}{3.5} + \frac{1}{4}\,\frac{1.2.3}{3.5.7} + \ldots\right).$$

As the series which the *Wasan-ka* (that is, old Japanese mathematicians) obtained in order to evaluate π or π^2 were mostly very slowly convergent series, they must have caused much trouble to evaluate π and π^2. The *Hōen-sanpō* was regarded with respect and very rare.

MATSUNAGA wrote a book, *Mukihen*, which contains a list of the integral values of the sides of rectangular triangles, that is, the solutions of the Pythagorean problem. The solutions of these problems are also looked upon as of SEKI's invention, and are more minutely related in *Mukihen*. The rectangular triangles whose hypotenuses are less than 1000 in length are given in the list. The book also contains a list of the integral values of the sides of any triangles, whose largest sides are shorter than 100. The details about the solutions of these problems will be given at the earliest opportunity; so we shall omit it here.

The books mentioned above are the chief ones of MATSUNAGA's works which were most of all manuscripts and extant in great number.

MATSUNAGA had a great many pupils, some of whom made great progress in their study. It was SHUJU YAMAJI who received all the five diplomas. YAMAJI obtained anew a series representing the volume of the sphere having a diameter unity and published mensurations about regular polygons. He learnt mathematics, first under YOSHITA KURUSHIMA (see later on) and then under GENKEI NAKANE (see before) and at last became MATSUNAGA's pupil. He died in 1772.

81. YAMAJI gave the certificate of *Inka* to his best pupil, NAOMARU AJIMA (see later on), who was the fifth head of the Seki school. Moreover SADASUKE FUJITA (see later on) and RAITŌ ARIMA were superior students of YAMAJI's. RAITŌ ARIMA was the Daimyō (a feudal chief having a large estate) of Kurume in the province of Chikugo of Kyushu island; he published a book, *Shuki-sanpō*, and for the first time SEKI's *Tenzan* method, that is, solutions of equations and their applications. Things pertaining to the *Enri* method, however, are not related in details; and it is almost impossible to learn it thoroughly by the book. The value of π is mentioned in the book for the first time as far as the fiftieth decimal. Though MATSUNAGA arrived at this before, he had kept it absolutely secret. It is also explained that the value of π may be represented by

$$\frac{428224593349304}{136308121570117}$$

This fraction agrees with the true value of π as far as the thirtieth decimal.

A Daimyō's book, Naitō's *Hoen-Kikō* (published 1766), is famous too and it contains a new method of finding circumradii of regular polygons.

82. Under these circumstances the Seki school had been prosperous; while many other schools of mathematics arose in succession in the latter part of the seventeenth century. The chief schools are as follows:

(1) The *Kuichi* school — founded by Yoshisue Tokuhisa.

(2) The *Nakanishi* school — founded by Masayoshi Nakanishi, a pupil of Kōun Sumida's, whose master was Chishō Imamura (see before).

(3) The *Miyagi* school — founded by Kiyoyuki Miyagi.

(4) The *Takuma* school – founded by Genzaemon Takuma; it is sometimes said to be a branch of the *Miyagi* school.

Besides, there existed the *Momokawa* school and the *Yoshida* school, the most ancient one and which had continuously been connected with Mitsuyoshi Yoshida's *Jinkōki* (see before). Those different schools did not study mathematics so profoundly as the Seki school and did not proceed farther than the *Tenzan* method and the *Endan* method. The *Kuichi* school especially taught only elementary parts, and the *Yi-Yang* doctrine besides.

83. There was a mathematician Yoshita Kurushima, who was born in the province Bicchu. He first learnt mathematics under Masayoshi Nakanishi; and afterwards he investigated it more eagarly, having learnt the *Tenzan* method from Genkei Nakane. He arrived at many methods by his own invention. He died in 1755. He was a great friend of Matsunaga. His lectures have come to us in Ajima's annotations. It was Kurushima who opened a school, the only one with no less authority than the Seki school. Among his results, there is a process of developing the square root of a number into a continued fraction.

In 1767 Kenkō Chino who was born in the province Sanuki

invented a calculation which is performed by means of an instrument like the *Swanpan*. I think it must have been imported from China, because the figures which were employed in the calculation much resemble those which, though not common Chinese letters, are at present applied by Chinese merchants (especially in the southern part of China).

84. To sum up, the following six sorts of calculations were employed from the last period to this period.

(1) The *Soroban* method,
(2) The *Sanchu* method,
(3) The *Tengen* method,
(4) The *Endan* method,
(5) The *Tenzan* method,
(6) The *Enri* method.

Some others might exist, but these mentioned were the chief ones. What was treated in these methods is arithmetic, elementary algebra, elementary geometry; and mensurations were prominently practiced. In geometry they discuss chiefly straight lines, circles, and their combinations, spheres, cylinders, cones, etc. They took the ellipse as the oblique section of the right cylinder, but its mensuration was not arrived at. They solved easily simple problems of quadrature and cubature without difficulty. In such a case they endeavoured to represent the area or volume required in a convergent power series of a parameter, and then formed the total sum of the series. The old Japanese mathematicians were apt to overestimate these methods, comparing them to Newton-Leibnitz's Calculus. It was a curious thing that, when they tried to find the circumference or area of a circle, they did not fail with much trouble to evaluate them minutely as the limits of the perimeters or areas of the inscribed regular polygons. They had no notion whatever to find them by dividing the circular area into rectangular strips, until Naomaru Ajima perceived this method at last, as will be told in the following period. But the volume and surface of the sphere were found by dividing it into right cylinders with very small thickness.

They had not at that time taken into account the convergency of infinite series. When they treated an infinite series,

they calculated the first five or six terms, and inferred the forms of the successive terms; they had no process of representing its general term. The infinite series were of very slow convergency and so they must have taken much trouble to find their sums.

We can safely suppose that the European mathematics were then already imported (probably by Dutchmen); but in this period Japanese had hated foreigners to a high degree. Therefore the intercourse did not become so flourishing that it could be of great influence upon the Japanese mathematics; though in reality it might have had some.

85. We are extremely surprised by, and forced to pay much respect to the old Japanese mathematicians who had a clear head and a wonderful, penetrative faculty, having solved several profound problems by means of their own tedious and troublesome methods of calculation, persevering greatly and making strenuous efforts. Those mathematicians, however, were not esteemed by the public. The knights (called *Samurai*) of the age had never paid attention to mathematics undervaluing it greatly, but learning with great enthusiasm the Confucian doctrine. In this period the rank of merchants was looked down upon as being far inferior to that of *Samurai* (knights). Mathematics were supposed to be learnt by merchants, but not by knigths. It was a fact that students of mathematics were limited to a small sphere of *Samurai* and were but comparatively few in number. With this remark we now close the fourth period.

(*To be continued.*)

Mª 1 e

UEBER FLÄCHENBÜSCHEL n^{ter} ORDNUNG,

VON

JAN DE VRIES.
(Utrecht).

1. Es sei ein Büschel punktallgemeiner Flächen n^{ter} Ordnung (F^n) gegeben. Die Berührungspunkte dieser Flächen mit den Geraden aus einem Punkte A bilden eine Fläche α, deren Ordnung bestimmt werden soll.

Auf einem Strahl durch A schneidet (F^n) eine Involution n^{ten} Grades ein, deren $2(n-1)$ Coïncidenzen offenbar dem Orte α angehören. Wird der Strahl Tangente an der Fläche welche durch A geht, so fällt eine dieser Coïncidenzen mit A zusammen. Hieraus erhellt dass α eine Fläche $(2n-1)^{er}$ Ordnung ist, welche den Punkt A enthält.

Es sei S ein Punkt der Basiscurve σ des Büschels, dann gibt es eine F^n, welche in S von der Geraden AS berührt wird; S gehört demnach der Fläche α^{2n-1} an. Der Strahl AS trägt jetzt eine Involution $(n-1)^{en}$ Grades, welche $2(n-2)$ Coïncidenzen besitzt; demnach sind in S zwei Schnittpunkte von AS mit α^{2n-1} vereinigt, d. h. AS berührt α^{2n-1} in S. Die Basiscurve σ liegt somit auf der Fläche α^{2n-1} und bildet einen Theil der Berührungscurve der Fläche mit dem Umhüllingskegel dessen Spitze in A liegt.

2. Wir betrachten die beiden den Punkten A und B zugeordneten Flächen α^{2n-1} und β^{2n-1}. Ihre Schnittcurve setzt sich zusammen aus der Basiscurve σ und einer Curve λ, deren Ordnung $(2n-1)^2 - n^2 = (n-1)(3n-1)$ ist. Offenbar enthält die Curve λ die Berührungspunkte der Flächen F^n mit ihren durch $l \equiv AB$ gelegten Berührungsebenen. Weil l von $2(n-1)$ Flächen berührt wird, ist sie $2(n-1)$-fache Secante

der λ, wonach eine beliebig durch l gelegte Ebene noch $3(n-1)^2$ Punkte von λ enthält. Da F^n von einer Berührungsebene in einer Curve mit einem Doppelpunkte getroffen wird, sind diese $3(n-1)^2$ Punkte die Doppelpunkte des Büschels von Curven n^{ter} Ordnung welches die betreffende Ebene mit (F^n) bestimmt.

Die Flächen ξ^{2n-1} welche den Punkten X von AB zugeordnet sind, bilden einen Flächenbüschel, dessen Basiscurve aus σ und λ zusammengesetzt is. Die Fläche ξ^{2n-1}, welche durch den beliebig im Raume gewählten Punkt P geht, entspricht dem Schnittpunkte X der Geraden AB mit der Ebene, welche die durch P gelegte F^n in P berührt.

3. Die Curven σ und λ schneiden sich in $2n^2(n-1)$ Punkten, nämlich in den Punkten T von σ deren Tangenten t die Gerade l treffen.

Man kann diese Zahl durch die nachfolgende Ueberlegung erhalten. Durch jeden Punkt S von σ legen wir die Berührungsebenen an zwei Flächen F_1^n und F_2^n, und bestimmen deren Schnittpunkte P_1 und P_2 mit l. Die erste Polarfläche von P_1 in Bezug auf F_1^n trifft σ in $n^2(n-1)$ Punkten S; demnach sind $n^2(n-1)$ Punkte P_2 dem Punkte P_1 zugeordnet; die Punkte P_1 und P_2 entsprechen einander daher in einer symmetrischen Verwandtschaft $n^2(n-1)^{en}$ Grades. Ist P eine Coïncidenz, so berührt PS die Curve σ in S, wonach die abwickelbare Tangentenfläche der Basiscurve von der Ordnung $2n^2(n-1)$ ist.

4. Es sei nun C ein beliebiger Punkt, der nicht in der Geraden $l \equiv AB$ liegt. Die Fläche γ^{2n-1}, welche dem Punkte C zugeordnet ist, trifft die Raumcurve λ in $(n-1)(2n-1)(3n-1)$ Punkten, welche drei getrennte Gruppen bilden.

Zunächst bemerken wir die Gruppe der $3(n-1)^2$ Punkte der Ebene (Cl), in welchen dieselbe von Flächen F^n berührt wird; es sind dies die Doppelpunkte des Curvenbüschels, welches (F^n) in (Cl) bestimmt. Eine zweite Gruppe wird gebildet durch die $2n^2(n-1)$ Schnittpunkte T von σ und λ; offenbar sind die Flächen F^n, welche beziehungsweise von der Geraden CT und der Ebene (lT) berührt werden, nicht identisch.

Die dritte Gruppe umfasst die Punkte D, welche eine Fläche F^n festlegen, die von den nicht in einer Ebene liegenden Geraden

AD, BD, CD berührt wird; ein solcher Punkt ist ein Doppelpunkt der betreffenden Fläche. Weil nun

$$(n-1)(2n-1)(3n-1)-3(n-1)^2-2n^2(n-1)=4(n-1)^3,$$

so erhellt der bekannte Satz: *In einem Büschel n^{ter} Ordnung gibt es $4(n-1)^3$ Flächen mit einem Doppelpunkte.*

5. Den Punkten X einer Ebene ε entsprechen die Flächen ξ^{2n-1} eines Netzes. Durch die Punkte A und B von ε geht nämlich die Fläche, welche dem Schnittpunkte von ε mit den Ebenen entspricht, die in A und B die durch diese Punkte gelegten Flächen F^n berühren. Sammtliche Flächen des Netzes enthalten die Basiscurve σ, die $3(n-1)^2$ in ε belegenen Doppelpunkte des Büschels (C^n), welches (F^n) einschneidet, und die $4(n-1)^3$ Doppelpunkte des Büschels (F^n).

Den Punkten des Raumes entsprechen die Flächen ξ^{2n-1} eines linearen Systems von drei Dimensionen, welche alle die Curve σ und die $4(n-1)^3$ Doppelpunkte enthalten.

EEN INHOUDSFORMULE VOOR EEN GROEP VAN LICHAMEN MET TWEE EVENWIJDIGE GRENSVLAKKEN,

DOOR

A. W. GROENMAN.
(Utrecht.)

Door Prof. Dr. J. DE VRIES [1]) is als algemeene inhoudsformule der prismoïde opgesteld:

$$I = \frac{h}{6}\left[\frac{2p-q}{p}P + \frac{2q-p}{q}Q + \frac{(p+q)^2}{pq}D_q^p\right] \ldots (I),$$

waarin h den afstand der evenwijdige grensvlakken voorstelt, P en Q hun oppervlak en D_q^p het oppervlak eener doorsnede, welke den afstand van P tot Q verdeelt in reden van p tot q.

Bewezen zal worden, dat deze inhoudsformule geldt voor alle lichamen met evenwijdige grond- en bovenvlakken, waarvan het oppervlak eener willekeurige doorsnede D_q^p, evenwijdig aan het grondvlak, eene tweedegraadsfunctie is van de hoogte x boven het grondvlak.

Voert men in plaats van de verhoudingsgetallen p en q de werkelijke waarden x en $h-x$ in en stelt men $D_q^p = D_{h-x}^x = f(x)$, dan is het grondvlak $P = D_h^0 = f(0)$ en het bovenvlak $Q = D_0^h = f(h)$.

Door substitutie in (I) vindt men

$$I = \frac{h}{6}\left[\frac{3x-h}{x}f(0) + \frac{2h-3x}{h-x}f(h) + \frac{h^2}{x(h-x)}f(x)\right] \ldots (II).$$

[1]) Verslag van de Gewone Vergadering der Wis- en Natuurkundige Afdeeling van 28 December 1901 van de „Koninklijke Academie van Wetenschappen te Amsterdam" (verschenen 9 Januari 1902).

Hieruit volgt, daar I = constante, voor de gedaante van $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{h^3} \{[-6\mathrm{I} + 3h f(0) + 3h f(h)] x^2 -$$
$$- [-6\mathrm{I}h + 4h^2 f(0) + 2h^2 f(h)] x + h^3 f(0)\}$$

De formule (I) zal gelden voor eene algemeene waarde der coëfficiënten van $f(x)$, dus voor $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, indien de vergelijking (II), na substitutie van dien vorm van $f(x)$, de gedaante verkrijgt van de algemeene inhoudsvergelijking van een lichaam, dat aan de geëischte voorwaarden voldoet:

$$\mathrm{I} = \int_0^h (\alpha x^2 + \beta x + \gamma) dx = h \left\{ \frac{\alpha}{3} h^2 + \frac{\beta}{2} h + \gamma \right\}.$$

Omdat substitutie werkelijk dit resultaat geeft, is het gestelde bewezen.

Hieruit kan nog afgeleid worden, dat door substitutie van ééne bijzondere waarde, $\phi(h)$, van x, in de inhoudsformule, deze geldig wordt voor alle lichamen met evenwijdig grond- en bovenvlak, waarvan het oppervlak eener willekeurige, aan het grondvlak evenwijdige doorsnede eene derdegraadsfunctie is van de hoogte boven het grondvlak, dus $D^p_{h-x} = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$.

Hiertoe moet voor eene bepaalde waarde van x, $x = \phi(h)$, de formule (II), na substitutie van $D^p_x = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$,

$$\mathrm{I} = \tfrac{1}{6} h \left\{ \frac{3x - h}{x} \delta + \frac{2h - 3x}{h - x} (\alpha h^3 + \beta h^2 + \gamma h + \delta) + \right.$$
$$\left. + \frac{h^2}{x(h - x)} (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) \right\}$$

identiek worden met

$$\mathrm{I} = \int_0^h (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) dx = \tfrac{1}{6} h \{\tfrac{3}{2} \alpha h^3 + 2\beta h^2 + 3\gamma h + 6\delta\}.$$

Gelijkstelling der coëfficiënten van α, β, γ en δ geeft, zooals uit het voorgaande te verwachten is, voor die van β, γ en δ identieke betrekkingen tusschen x en h, terwijl de coëfficiënten van α de betrekkingen opleveren:

$$2x^3 - 3hx^2 + h^2 x = 0,$$

met wortels:

$$x = 0,\ \frac{h}{2} \text{ en } h,$$

waarvan alleen de wortel $x = \frac{h}{2}$ aan het vraagstuk voldoet.

Deze waarde, gesubstitueerd in (II), geeft het bekende resultaat, dat de inhoudsformule der prismoïde:

$$I = \tfrac{1}{6} h \,(G + B + 4M),$$

waarin G het oppervlak van het grondvlak, B dat van het bovenvlak, M van de middendoorsnede, en h den afstand van grond- en bovenvlak voorstelt, geldig is voor alle lichamen, met evenwijdig grond- en bovenvlak, waarvan het oppervlak van eene met het grondvlak evenwijdige, overigens willekeurige, doorsnede eene derdegraadsfunctie is van de hoogte boven het grondvlak.

De wortels $x = h$ en $x = 0$ gaan door verwisseling van de beide grensvlakken in elkander over.

Na substitutie van $x = h$ wordt vergelijking (II):

$$I = \frac{h}{6}\left[2\,f(0) - \frac{h}{h-h}\,f(h) + \frac{h}{h-h}\,f(h)\right].$$

Daar de noemers in de beide laatste termen nul zijn, heeft deze bijzondere waarde van x alleen bruikbare beteekenis, als de tellers in die termen ook nul worden en de breuken daardoor eindige waarde verkrijgen. $f(h) = 0$ beteekent, dat één der grensvlakken in een punt is ontaard.

Men vindt dus als inhoud van den kegel, waarvan het oppervlak van eene met het grondvlak, G, evenwijdige, overigens willekeurige doorsnede eene derdegraadsfunctie is van de hoogte boven het grondvlak:

$$I = \tfrac{1}{3} h \,.\, G.$$

Ook blijkt hieruit, dat eene andere bijzondere waarde van x aan vergelijking (II) geene uitbreiding der geldigheid kan geven.

OVER DE BEPAALDE INTEGRAAL $\int_0^1 e^{-q^2 z} z^{p-1} dz$,

DOOR

J. G. RUTGERS,
(Alkmaar.)

In het volgende stel ik mij voor van deze bepaalde integraal eene waarde te ontwikkelen, waarin BESSELsche functies optreden, en bij welke ontwikkeling zal blijken, dat q alle reëele, imaginaire en complexe getallen kan vertegenwoordigen, terwijl p alleen reëel of complex kan zijn en voldoen moet aan de voorwaarde, dat 't reëele gedeelte van $p > 0$, hetgeen we kortweg zullen voorstellen door $R(p) > 0$.

Om tot die waarde te komen, moet ik gebruik maken van de formules (v) en (w), die voorkomen op blz. 36 van mijne dissertatie: „Over differentialen van gebroken orde en haar gebruik bij de afleiding van bepaalde integralen" (Utrecht, 1904), en wier afleiding ik hier eerst beknopt weergeef.

1. Vermenigvuldigt men de beide leden der bekende vergelijking van EULER:

$$\int_0^1 (1-z)^{p-1} z^n dz = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+p+1)}, \quad \begin{pmatrix} R(p) > 0 \\ R(n) > -1 \end{pmatrix}$$

met $a_n x^n$, waarna men bij sommatie over n en de substitutie $z = y^r$ krijgt de formule:

$$\int_0 y^{r-1}(1-y^r)^{p-1} \Sigma a_n (xy^r)^n dy =$$

$$= \frac{\Gamma(p)}{r} \Sigma a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+p+1)} x^n, \quad \begin{pmatrix} R(p) > 0 \\ R(n) > -1 \end{pmatrix} \quad \ldots (1),$$

dan kan men hiermede de waarden van vele bepaalde inte-

gralen opsporen door verschillende functies $f(x)$, die ontwikkeld kunnen worden naar het theorema van MACLAURIN, dus in den vorm $\Sigma a_n x^n$ $(R(n) > -1)$ geschreven kunnen worden, op de plaats te stellen van $\Sigma a_n (xy^r)^n$ en de daarbij behoorende waarde van $\Sigma a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+p+1)} x^n$ te vinden. Dit is in genoemde dissertatie geschied.

Voor ons doel beschouwen we de Besselsche functie:

$$I_\lambda(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{\lambda+2m}}{m!\,\Gamma(m+\lambda+1)},$$

waarin λ geheel willekeurig is, en stellen we voor

$$\Sigma a_n x^n \, (R(n) > -1)$$

in de plaats:

$$x^{\frac{\nu}{2}} I_\nu(\sqrt{x}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{m+\nu}}{2^{2m+\nu}\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+\nu+1)},$$

waarbij dus als eerste voorwaarde $(R(n) > -1)$ optreedt: $R(\nu) > -1$, of $\nu = -\alpha =$ negatief geheel (of nul), omdat in het laatste geval:

$$I_{-\alpha}(x) = \sum_{m=\alpha}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-\alpha}}{m!\,\Gamma(m+\alpha+1)}.$$

Nemen we in (1): $p = \rho + 1$, dan krijgen we in 't tweede lid voor $\Sigma a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\rho+2)} x^n$, zoo:

1e $R(\nu) > -1$:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)_m x^{m+\nu}}{2^{2m+\nu}(m+1)\Gamma(m+\nu+\rho+2)} = 2^{\rho+1} x^{\frac{\nu-\rho-1}{2}} I_{\nu+\rho+1}(\sqrt{x}).$$

2e $\nu = -\alpha$:

$$\sum_{m=}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{m-\alpha}}{2^{2m-\alpha}\,\Gamma(m+1)\,\Gamma(m-\alpha+\rho+2)} =$$

$$= 2^{\rho+1} x^{-\frac{\rho+\alpha+1}{2}} \left\{ I_{\rho-\alpha+1}(\sqrt{x}) - \sum_{m=0}^{\alpha-1} \frac{(-1)^m x^{m+\frac{\rho-\alpha+1}{2}}}{2^{2m+\rho-\alpha+1}\, m!\,\Gamma(m+\rho-\alpha+2)} \right\}.$$

Voert men deze substituties achtereenvolgens uit in (1), vervangt men x door x^2 en neemt men $r=2$, dan vindt men na eenige herleiding de bedoelde 2 formules:

$$\int_0^1 I_\nu(xy)y^{\nu+1}(1-y^2)^\rho dy = \frac{2^\rho\Gamma(\rho+1)}{x^{\rho+1}} I_{\nu+\rho+1}(x), \quad \begin{pmatrix} R(\nu) > -1 \\ R(\rho) > -1 \end{pmatrix} \ldots (2)$$

$$\int_0^1 I_{-\alpha}(xy)\, y^{1-\alpha}(1-y^2)^\rho\, dy =$$

$$= \frac{2^\rho\Gamma(\rho+1)}{x^{\rho+1}} \left\{ I_{\rho-\alpha+1}(x) - \sum_0^{\alpha-1} \frac{(-1)^n\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\rho-\alpha+1}}{n!\,\Gamma(n+\rho-\alpha+2)} \right\}, \quad \begin{pmatrix} \alpha = \text{pos. geheel} \\ \text{of nul} \\ R(\rho) > -1 \end{pmatrix} (3).$$

Wanneer men in (2) substitueert: $y = \cos\phi$, krijgt men een formule, die in dien vorm voorkomt in het „Handbuch der Theorie der Cylinderfunctionen" von Dr. NIELS NIELSEN (p. 181; 1904), en 't eerst is gegeven door SONIN (Mathem. Annalen, Bd. 16, p. 36; 1880). *Formule* (3) *daarentegen komt er niet in voor en is juist voor ons doel van niet minder belang dan formule* (2).

2. Substitueeren we in (3): $I_{-\alpha}(xy) = (-1)^\alpha I_\alpha(xy)$, en vervangen we in beide formules weer ρ door $p-1$, nemen we in (2) eerst $\nu = 0$, daarna $\nu = n$, en in (3) $\alpha = n$, dan krijgen we onder de voorwaarden $R(p) > 0$ en n positief geheel de volgende 3 vergelijkingen:

$$\int_0^1 I_0(xy)\,.\,y(1-y^2)^{p-1}dy = \frac{2^{p-1}\Gamma(p)}{x^p} I_p(x) \ldots\ldots (4),$$

$$\int_0^1 y^n I_n(xy)\,.\,y(1-y^2)^{p-1}dy = \frac{2^{p-1}\Gamma(p)}{x^p} I_{p+n}(x) \ldots. (5),$$

$$\int_0^1 \frac{(-1)^n}{y^n} I_n(xy)\,.\,y(1-y^2)^{p-1}\,dy =$$

$$= \frac{2^{p-1}\Gamma(p)}{x^p} \left\{ I_{p-n}(x) - \sum_0^{n-1} \frac{(-1)^m\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p-n}}{m!\,\Gamma(m+p-n+1)} \right\} \ldots (6).$$

Sommeeren we de vergelijkingen (5) en (6) over n van 1 tot ∞, en tellen we de verkregen uitkomsten op bij (4), dan komen we, met inachtneming der gelijkheid:

$$I_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ y^n + \frac{(-1)^n}{y^n} \right\} I_n(z) = e^{\frac{z}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right)},$$

waarin we nemen $z = xy$, op het volgende resultaat:

$$\int_0^1 e^{\frac{xy}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right)} . y(1-y^2)^{p-1} dy =$$

$$= \frac{2^{p-1}\Gamma(p)}{x^p} \left[I_p(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ I_{p+n}(x) + I_{p-n}(x) - \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p-n}}{m!\Gamma(m+p-n+1)} \right\} \right],$$

$$(R(p) > 0).$$

De substitutie: $y = \sqrt{1-z}$ doet de integraal overgaan in: $\frac{1}{2}\int_0^1 e^{-\frac{x}{2}z} z^{p-1} dz$, waarvoor we dus op deze wijze eene waarde gevonden hebben, waarin Besselsche functies optreden.

We kunnen evenwel nog een anderen vorm geven aan de in de verkregen uitkomst voorkomende dubbele som:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p-n}}{m!\,\Gamma(m+p-n+1)}.$$

Door te substitueeren $m = n - r - 1$ gaat deze uitdrukking over in:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-r-1} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+n-2r-2}}{\Gamma(n-r)\,\Gamma(p-r)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+n-2}}{\Gamma(n)\,\Gamma(p)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-2} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+n}}{\Gamma(n-1)\,\Gamma(p-1)} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-3} \left(\frac{x}{2}\right)^{p+n-6}}{\Gamma(n-2)\,\Gamma(p-2)} + \ldots,$$

waarvoor men, onder weglating der termen, die nul worden door invoering der verschillende waarden van n, waarover men te sommeeren heeft, ook kan schrijven:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+n-2}}{\Gamma(n)\,\Gamma(p)}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-2}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+n-4}}{\Gamma(n-1)\,\Gamma(p-1)}+$$

$$+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-3}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+n-6}}{\Gamma(n-2)\,\Gamma(p-2)}+\ldots\ldots,$$

en wanneer men in deze termen achtereenvolgens neemt: $n=m+1$, $n=m+2$, $n=m+3$, enz., krijgt men hiervoor:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+m-1}}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(p)}+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+m-2}}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(p-1)}+$$

$$+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+m-3}}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(p-2)}+\ldots\ldots=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^{m}\left(\frac{x}{2}\right)^{m}}{\Gamma(m+1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p-n}}{\Gamma(p-n+1)}=e^{-\frac{x}{2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p-n}}{\Gamma(p-n+1)},$$

zoodat we ten slotte de volgende uitdrukking vinden, zoo we nog $\frac{x}{2}$ vervangen door q, welke letter dan, evenals x, alle reëele, imaginaire en complexe getallen kan vertegenwoordigen:

$$\int_0^1 e^{-qz}z^{p-1}\,dz=$$

$$=\frac{\Gamma(p)}{q^p}\left[I_p(2q)+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{I_{p+n}(2q)+I_{p-n}(2q)-\frac{q^{p-n}\,.\,e^{-q}}{\Gamma(p-n+1)}\right\}\right],$$

$$(R(p)>0)\quad\ldots\ldots\ldots\quad(7).$$

Heel eigenaardig zien we hierbij als factor optreden:

$$\frac{\Gamma(p)}{q^p}=\int_0^{\infty}e^{-qz}z^{p-1}\,dz,\ (R(p)>0).$$

3. Indien $p = a + 1 =$ positief geheel, kunnen we het rechterlid van (7) herleiden tot eene uitdrukking, waarin de Besselsche functies ontbreken.

In dat geval kunnen we nl. de volgende herleidingen uitvoeren:

$$I_{a+1}(2q) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ I_{a+n+1}(2q) + I_{a-n+1}(2q) - \frac{q^{a-n+1} e^{-q}}{\Gamma(a-n+2)} \right\} =$$

$$= I_0(2q) + \sum_{n=1}^{\infty} \{ I_n(2q) + I_{-n}(2q) \} - e^{-q} \sum_{n=1}^{a+1} \frac{q^{a-n+1}}{\Gamma(a-n+2)} =$$

$$= I_0(2q) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} I_{2n}(2q) - e^{-q} \sum_{n=1}^{a+1} \frac{q^{a-n+1}}{\Gamma(a-n+2)} =$$

$$= 1 - e^{-q} \sum_{n=1}^{a+1} \frac{q^{a-n+1}}{\Gamma(a-n+2)},$$

zoodat we krijgen:

$$\int_0^1 e^{-qz} z^a dz = \frac{\Gamma(a+1)}{q^{a+1}} - e^{-q} \sum_{n=1}^{a+1} \frac{\Gamma(a+1) q^{-n}}{\Gamma(a-n+2)} =$$

$$= \frac{1^{a/1}}{q^{a+1}} (1 - e^{-q}) - e^{-q} \sum_{n=1}^{a} a^{(n-1)/-1} \frac{1}{q^n}, \quad (a = 0, 1, 2, \ldots) \,.\,.\, (8)$$

terwijl men hiervoor vindt in de „Nouvelles tables d'integrales définies" par D. BIERENS DE HAAN (1867):

$$\frac{1^{a/1}}{q^{a+1}} (1 - e^{-q}) - e^{-q} \sum_{n=1}^{a} a^{n/-1} \frac{1}{q^n} \quad \text{(T. 80, 2).}$$

waarvoor men, onder weglating der termen, die nul worden door invoering der verschillende waarden van n, waarover men te sommeeren heeft, ook kan schrijven:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+n-2}}{\Gamma(n)\,\Gamma(p)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-2}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+n-4}}{\Gamma(n-1)\,\Gamma(p-1)} +$$

$$+ \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-3}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+n-6}}{\Gamma(n-2)\,\Gamma(p-2)} + \ldots\ldots,$$

en wanneer men in deze termen achtereenvolgens neemt: $n = m + 1$, $n = m + 2$, $n = m + 3$, enz., krijgt men hiervoor:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+m-1}}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(p)} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+m-2}}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(p-1)} +$$

$$+ \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m}\left(\frac{x}{2}\right)^{p+m-3}}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(p-2)} + \ldots\ldots =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m}\left(\frac{x}{2}\right)^{m}}{\Gamma(m+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p-n}}{\Gamma(p-n+1)} = e^{-\frac{x}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{p-n}}{\Gamma(p-n+1)},$$

zoodat we ten slotte de volgende uitdrukking vinden, zoo we nog $\frac{x}{2}$ vervangen door q, welke letter dan, evenals x, alle reëele, imaginaire en complexe getallen kan vertegenwoordigen:

$$\int_0^1 e^{-qz} z^{p-1}\,dz =$$

$$= \frac{\Gamma(p)}{q^p}\left[I_p(2q) + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{I_{p+n}(2q) + I_{p-n}(2q) - \frac{q^{p-n}\,.\,e^{-q}}{\Gamma(p-n+1)}\right\}\right],$$

$$(R(p) > 0) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Heel eigenaardig zien we hierbij als factor optreden:

$$\frac{\Gamma(p)}{q^p} = \int_0^{\infty} e^{-qz} z^{p-1}\,dz,\ (R(p) > 0).$$

3. Indien $p = a + 1 =$ positief geheel, kunnen we het rechterlid van (7) herleiden tot eene uitdrukking, waarin de Besselsche functies ontbreken.

In dat geval kunnen we nl. de volgende herleidingen uitvoeren:

$$I_{a+1}(2q) + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{I_{a+n+1}(2q) + I_{a-n+1}(2q) - \frac{q^{a-n+1}e^{-q}}{\Gamma(a-n+2)}\right\} =$$

$$= I_0(2q) + \sum_{n=1}^{\infty}\{I_n(2q) + I_{-n}(2q)\} - e^{-q}\sum_{n=1}^{a+1}\frac{q^{a-n+1}}{\Gamma(a-n+2)} =$$

$$= I_0(2q) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_{2n}(2q) - e^{-q}\sum_{n=1}^{a+1}\frac{q^{a-n+1}}{\Gamma(a-n+2)} =$$

$$= 1 - e^{-q}\sum_{n=1}^{a+1}\frac{q^{a-n+1}}{\Gamma(a-n+2)},$$

zoodat we krijgen:

$$\int_0^1 e^{-qz} z^a dz = \frac{\Gamma(a+1)}{q^{a+1}} - e^{-q}\sum_{n=1}^{a+1}\frac{\Gamma(a+1)\,q^{-n}}{\Gamma(a-n+2)} =$$

$$= \frac{1^{a/1}}{q^{a+1}}(1 - e^{-q}) - e^{-q}\sum_{n=1}^{a} a^{(n-1)/-1}\frac{1}{q^n},\ (a = 0, 1, 2, \ldots) \ldots (8)$$

terwijl men hiervoor vindt in de „Nouvelles tables d'integrales définies" par D. Bierens de Haan (1867):

$$\frac{1^{a/1}}{q^{a+1}}(1 - e^{-q}) - e^{-q}\sum_{n=1}^{a} a^{n/-1}\frac{1}{q^n}\ \text{(T. 80, 2).}$$

RÉSIDUS QUADRATIQUES DE POLYNÔMES,

PAR

W. MANTEL.
(Delft.)

L'étude suivante se rapporte à une théorie qui a été développée par SERRET dans son *Cours d'Algèbre Supérieure*, 4me Edit., Section III, Chap. III. On considère dans cette théorie des fonctions entières d'une variable x à coefficients entiers; on néglige dans les coefficients les multiples d'un nombre premier p donné. Si les coefficients de la différence $\phi(x)\,\psi(x) - F(x)$ sont tous divisibles par p, on écrit

$$\phi(x)\,\psi(x) \equiv F(x) \quad (\text{mod. } p)$$

et on dit que $F(x)$ est égale, suivant le module p, au produit des fonctions $\phi(x)$ et $\psi(x)$.

Une fonction est dite *irréductible suivant le module premier p*, si elle n'est divisible, suivant ce module, par aucune fonction entière d'un degré inférieur au sien et si, en outre, le coefficient de la plus haute puissance de x est égal à l'unité.

Lorsque la différence de deux fonctions entières $f(x)$ et $\phi(x)$ est divisible suivant le module p par la fonction irréductible $F(x)$, on dit que $f(x)$ et $\phi(x)$ sont congrues suivant le module p et suivant la fonction modulaire $F(x)$; on exprime ce fait par la formule

$$f(x) \equiv \phi(x) \quad [\text{mod. } p,\ F(x)].$$

Cette théorie peut aussi être envisagée comme une théorie des nombres algébriques. En effet, laissons de côté pour un instant le module p. Alors, s'occuper des restes de la division de polynômes par la fonction irréductible $F(x)$, c'est la même chose que traiter des nombres qui dépendent de l'irrationelle

définie par l'équation $F(x) = o$. Cela n'empêche pas la théorie des nombres algébriques d'être beaucoup plus difficile que celle des „congruences irréductibles" que nous étudions; l'introduction du module numérique p comporte une grande restriction. On le verra facilement en comparant les pages suivantes au Mémoire important de M. D. HILBERT, intitulé *Ueber die Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers* (*Mathematische Annalen*, Bd. LI, p. 1—127.) Dans ce Mémoire M. HILBERT établit la loi de réciprocité des résidus quadratiques pour les nombres algébriques d'un champ quelconque dans toute sa généralité, tandis que nous allons faire la même chose pour les polynômes réduits suivant un module premier. Nos déductions sont élémentaires et accessibles à des lecteurs qu' épouvanterait la *primäre Zahl eines primären Primideals* dont parle de coeur leger le savant de Göttingue.

Etant donné un nombre premier impair p et une fonction irréductible suivant le module p, $F(x)$, de degré n, on peut dresser une liste de toutes les fonctions réduites suivant le double module $[p, F(x)]$; leur degré est $< n$, leurs coefficients peuvent être choisis parmi les nombres $0, 1, 2, \ldots (p-1)$. Cela donnerait p_n fonctions, y compris les fonctions de degré zéro, c'est à dire les simples nombres. Or une de ces fonctions aurait tous ces coefficients nuls; on ne saurait qu'en faire. Restent donc $p^n - 1$ fonctions réduites: $X_1, X_2, \ldots X_{p^n-1}$.

Le théorème fondamental de la théorie, répondant au théorème de FERMAT pour les nombres rationnels, est que la congruence

$$X^{p^n-1} - 1 \equiv 0 \; [\text{mod. } p, F(x)]$$

est satisfaite par toutes les fonctions réduites. Cette congruence se décompose en

$$X^{\frac{p^n-1}{2}} - 1 \equiv 0 \quad \text{et} \quad X^{\frac{p^n-1}{2}} + 1 \equiv 0.$$

Evidemment une fonction, qui est congrue à un carré, satisfera à la première congruence; une telle fonction s'appelle *résidu quadratique.* Les racines de l'autre congruence s'appellent *nonrésidus quadratiques* de $F(x)$.

On voit facilement que le produit de deux résidus ou de

deux nonrésidus est résidu, et que le produit d'un résidu et d'un nonrésidu est nonrésidu.

Si p était égal à 2, la décomposition ne pourrait se faire; alors il n'y a pas de nonrésidus. Nous excluons ce cas.

Pour avoir les résidus dans un cas déterminé on forme les carrés des fonctions réduites et on en ôte les multiples des modules. Il suffit de prendre la moitié des fonctions réduites, car à chaque fonction correspond une complémentaire telle que la somme des deux est congrue à zéro; leurs carrés laisseraient le même résidu. On évite ces redondances en prenant toujours le premier coefficient $< \frac{p}{2}$. Voici par exemple le calcul des résidus quadratiques de $x^2 + 2x + 3$ suivant le module 7.

$1^2 \equiv 1$	$(2x + 2)^2 \equiv 6$
$2^2 \equiv 4$	$(2x + 3)^2 \equiv 4x + 4$
$3^2 \equiv 2$	$(2x + 4)^2 \equiv x + 4$
$x^2 \equiv 5x + 4$	$(2x + 5)^2 \equiv 5x + 6$
$(x + 1)^2 \equiv 5$	$(2x + 6)^2 \equiv 2x + 3$
$(x + 2)^2 \equiv 2x + 1$	$(3x)^2 \equiv 3x + 1$
$(x + 3)^2 \equiv 4x + 6$	$(3x + 1)^2 \equiv 2x + 2$
$(x + 4)^2 \equiv 6x + 6$	$(3x + 2)^2 \equiv x + 5$
$(x + 5)^2 \equiv x + 1$	$(3x + 3)^2 \equiv 3$
$(x + 6)^2 \equiv 3x + 5$	$(3x + 4)^2 \equiv 6x + 3$
$(2x)^2 \equiv 5x + 2$	$(3x + 5)^2 \equiv 5x + 5$
$(2x + 1)^2 \equiv 3x + 3$	$(3x + 6)^2 \equiv 3x + 2$

Sont résidus:

1	2	3	4	5	6
$x + 1$	$x + 4$	$x + 5$	$2x + 1$	$2x + 2$	$2x + 3$
$3x + 1$	$3x + 3$	$3x + 5$	$4x + 2$	$4x + 4$	$4x + 6$
$5x + 4$	$5x + 5$	$5x + 6$	$6x + 2$	$6x + 3$	$6x + 6$

Sont nonrésidus:

x	$x+2$	$x+3$	$x+4$	$2x$	$2x+4$
$2x+5$	$2x+6$	$3x$	$3x+2$	$3x+4$	$3x+6$
$4x$	$4x+1$	$4x+3$	$4x+5$	$5x$	$5x+1$
$5x+2$	$5x+3$	$6x$	$6x+1$	$6x+4$	$6x+5$

Voici la question principale qu'il y a lieu de poser dans cette matière:

Etant donné un nombre premier impair p et une fonction $F(x)$ irréductible suivant le module p; comment saura-t-on si une fonction donnée quelconque $f(x)$ est résidu ou nonrésidu quadratique de $F(x)$ suivant le module p?

Nous allons examiner d'abord le cas particulier où $f(x)$ se réduit à un nombre G. Pour être résidu il faut qu'il satisfasse à la congruence

$$G^{\frac{p^n-1}{2}} - 1 \equiv 0 \quad [\text{mod. } p, \ F(x)].$$

Or, x n'entrant pas au premier membre, cela revient à la congruence numérique

$$G^{\frac{p^n-1}{2}} - 1 \equiv 0 \quad (\text{mod. } p).$$

Si n est pair, $\frac{p^n-1}{2}$ est un multiple de $(p-1)$ et la dernière congruence est satisfaite en vertu du théorème de FERMAT. Si n est impair, l'exposant $\frac{p^n-1}{2}$ n'est pas un multiple de $(p-1)$, mais il est divisible par $\frac{p-1}{2}$; la congruence exige donc que $G^{\frac{p-1}{2}} - 1 \equiv 0$ (mod. p), c'est-à-dire que G doit être résidu quadratique de p.

Il faut encore mentionner le cas où la fonction modulaire est du premier degré. Comme on réduit toujours les résidus à un degré inférieur à celui de la fonction modulaire, ici les résidus seront de simples nombres et ils ne seront autre chose que les résidus du module p; la fonction modulaire ne joue aucun rôle.

Nous allons maintenant établir le théorème qui régit le cas général, et qui sera la loi de réciprocité pour la théorie qui nous occupe. La déduction que nous en ferons est intimement liée à la troisième démonstration de Gauss de la loi de réciprocité de Legendre dans le domaine des nombres rationnels.

Soit toujours p un nombre premier impair; soient $f(x)$ et $F(x)$ deux fonctions entières de degrés m et n. Nous ne supposons pas actuellement irréductibles ces fonctions, seulement elles ne doivent pas être divisibles suivant le module p par une même fonction. De plus nous supposons que les coefficients des puissances les plus élevées de x soient l'unité. Si m et n sont inégaux, soit n le plus grand. Appelons X_1, X_2, ... $X_{\frac{p^n-1}{2}}$ les fonctions réduites suivant le double module $[p, F(x)]$ où le coefficient de la plus haute puissance de x est $< \frac{p}{2}$.

Multiplions X_1, X_2, ... par $f(x)$ et divisons les produits par $F(x)$, en négligeant toujours les multiples de p. Les restes de ces divisions seront des fonctions réduites; si le coefficient de la plus haute puissance de x est $> \frac{p}{2}$, nous changeons le signe; ainsi nous faisons entrer tous les restes dans la suite X_1, X_2, ... $X_{\frac{p^n-1}{2}}$. Je dis que tous les restes sont differents et que par conséquent ils ne sont autre chose que les X en désordre. En effet, si l'on avait

$$X_i f(x) - Q_i F(x) \equiv \pm X_k \qquad (\text{mod. } p)$$

et

$$X_j f(x) - Q_j F(x) \equiv \pm X_k \qquad (\text{mod. } p),$$

il en résulterait

$$(X_i \pm X_j) f(x) \equiv (Q_i \pm Q_j) F(x) \qquad (\text{mod. } p).$$

Comme $f(x)$ et $F(x)$ n'ont pas de facteur commun, il faudrait que $F(x)$ divisât suivant le module p l'expression $(X_i \pm X_j)$, dont le degré est moindre que celui de $F(x)$, ce qui est impossible.

Voici la liste des congruences ainsi obtenues pour $p = 3$, $f(x) = x^2 + 2x$, $F(x) = x^3 + x^2 + x + 1$.

(A)	1	fois $f(x)$	$-\,0$	fois $F(x)$		$\equiv x^2 + 2x$
	x	» »	$-\,1$	» »		$\equiv x^2 + 2x + 2$
	$x+1$	» »	$-\,1$	» »		$\equiv -(x^2+2x+1)$
	$x+2$	» »	$-\,1$	» »		$\equiv -1$
	x^2	» »	$-(x+1)$	» »		$\equiv x^2 + x + 2$
	x^2+1	» »	$-(x+1)$	» »		$\equiv -(x^2+1)$
	x^2+2	» »	$-(x+1)$	» »		$\equiv -(x+1)$
	x^2+x	» »	$-(x+2)$	» »		$\equiv -(x^2+2)$
	x^2+2x	» »	$-\,x$	» »		$\equiv -x$
	x^2+x+1	» »	$-(x+2)$	» »		$\equiv -(x+2)$
	x^2+x+2	» »	$-(x+2)$	» »		$\equiv x^2+x+1$
	x^2+2x+1	» »	$-\,x$	» »		$\equiv x^2+x$
	x^2+2x+2	» »	$-\,x$	» »		$\equiv -x^2.$

Nous introduisons maintenant le symbole $\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)$ pour désigner l'unité positive ou négative selon que le nombre des restes négatifs sera pair ou impair. Dans l'exemple il y a 8 restes négatifs, donc $\left(\frac{x^2+2x}{x^3+x^2+x+1}\right) = +1$. Ce symbole obéit aux lois suivantes.

Première propriété. Si P désigne un polynôme quelconque, on a

$$\left(\frac{f(x)+PF(x)}{F(x)}\right) = \left(\frac{f(x)}{F(x)}\right).$$

Car la congruence

$$X_i f(x) - Q_i F(x) \equiv \pm X_j$$

peut être remplacée par celle-ci

$$X_i \{f(x) + PF(x)\} - \{Q_i + PX_i\} F(x) \equiv \pm X_j,$$

ce qui revient à dire qu'on peut ajouter librement à $f(x)$ un multiple de $F(x)$ sans changer les signes des seconds membres, qui seuls déterminent la valeur du symbole.

Deuxième propriété. Si $f_1(x)$ est une autre fonction n'ayant pas de diviseur commun avec $F(x)$ suivant le module p, on a

$$\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)\left(\frac{f_1(x)}{F(x)}\right)=\left(\frac{f(x)\,f_1(x)}{F(x)}\right).$$

Pour le démontrer soit c le nombre des seconds membres négatifs dans les congruences

$$X_i f(x) - Q_i F(x) \equiv \pm X_j,$$

d celui dans les congruences

$$X_j f_1(x) - R_j F(x) \equiv \pm X_k.$$

On aura $\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right) = (-1)^c$, $\left(\frac{f_1(x)}{F(x)}\right) = (-1)^d$. De la première suite de congruences nous déduisons ces autres

$$X_i f(x) f_1(x) - Q_i f_1(x) F(x) \equiv \pm X_j f_1(x),$$

et nous remplaçons les seconds membres par leurs valeurs tirées de la seconde suite, ce qui donne

$$X_i f(x) f_1(x) - \{Q_i f_1(x) \pm R_j\} F(x) \equiv \pm X_k.$$

Le nombre des signes négatifs aux seconds membres de cette suite sera $c+d$, à un multiple de 2 près. On a donc

$$\left(\frac{f(x)\,f_1(x)}{F(x)}\right) = (-1)^{c+d},$$

d'où résulte la propriété annoncée.

Troisième propriété. Lorsque $F(x)$ est irréductible suivant le module p, $f(x)$ sera résidu quadratique de $F(x)$, si le symbole a la valeur $+1$; elle sera nonrésidu si le symbole est égal à -1.

On le démontre en multipliant toutes les congruences

$$X_i f(x) - Q_i F(x) \equiv \pm X_j$$

membre à membre; si l'on efface ensuite les termes divisibles par $F(x)$, on aura

$$X_1 X_2 \ldots X_{\frac{p^n-1}{2}} \{f(x)\}^{\frac{p^n-1}{2}} \equiv (-1)^c X_1 X_2 \ldots X_{\frac{p^n-1}{2}} \text{ [mod. } p, F(x)],$$

c étant le nombre des restes négatifs aux seconds membres.

On peut diviser par les X, parce que F(x) est supposée irréductible; on a alors

$$\{f(x)\}^{\frac{p^m-1}{2}} \equiv (-1)^\epsilon,$$

ce qui démontre la proposition.

Quatrième propriété. Loi de reciprocité. Les valeurs des symboles inverses sont égales, excepté le cas où les deux polynômes sont de degré impair et qu'en même temps p est de la forme 4i — 1. On peut exprimer ceci par la formule

$$\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)\left(\frac{F(x)}{f(x)}\right) = (-1)^{\frac{p^m-1}{2}\cdot\frac{p^n-1}{2}}.$$

Nous observons d'abord que les congruences, qui déterminent la valeur de $\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)$, comprennent celles qui déterminent la valeur du symbole inverse; on n'a qu'à effacer celles où le degré du second membre est supérieur à m. Ainsi dans l'exemple ci-dessus les congruences pour $\left(\frac{F(x)}{f(x)}\right)$ sont

$$\begin{array}{lrl} \text{(B)} & (x+1)\,.\,f(x) - 1\,.\,F(x) \equiv -1 & \text{(mod. 3)} \\ & (x^2+2)\,.\,f(x) - (x+1)\,.\,F(x) \equiv -(x+1) & \text{»} \\ & (x^2+2x)\,.\,f(x) - x\,.\,F(x) \equiv -x & \text{»} \\ & (x^2+x+1)\,.\,f(x) - (x+2)\,.\,F(x) \equiv -(x+2) & \text{»} \end{array}$$

Les coefficients de F(x) sont, aux signes et à l'ordre près, les mêmes que les seconds membres. (Dans notre exemple les signes et l'ordre ne sont pas différents à droite et à gauche; c'est un pur hasard.) Soit k le nombre des restes négatifs dans la suite (B), $k+h$ celui dans la suite (A). Nous avions

$$\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right) = (-1)^{k+h}.$$

La multiplication de congruences de la suite (B) donne, en effaçant les termes qui contiennent $f(x)$:

$$X_1 X_2 \ldots X_{\frac{p^m-1}{2}}\,.\,\{-F(x)\}^{\frac{p^m-1}{2}} \equiv X_1 X_2 \ldots X_{\frac{p^m-1}{2}}\,.\,(-1)^k\ [\text{mod.}\, p, f(x)].$$

Il en résulte

$$\left(\frac{F(x)}{f(x)}\right) = (-1)^{\frac{p^m-1}{2}+k},$$

et puis

$$\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)\left(\frac{F(x)}{f(x)}\right) = (-1)^{\frac{p^m-1}{2}+k}.$$

Il faut donc trouver dans les congruences (A) le nombre des restes négatifs, qui sont d'un degré $\geq m$.

D'abord, si dans la formule générale

$$X_i f(x) - Q_i F(x) \equiv \pm X_j$$

le multiplicateur X_i est d'un degré inférieur à $(n-m)$, le quotient Q_i est nul et le second membre est positif. Il faut donc considérer les X_i qui ont pour degrés $(n-m)$, $(n-m+1)$,... $(n-1)$; en même temps le degré de X_j ne doit pas descendre au-dessous de m. Je dis que dans ces conditions pour chaque degré de X_j il y a autant de X_j positifs que de négatifs. En effet, multiplions $f(x) = x^m + Ax^{m-1} + \ldots$ par une fonction réduite $X_i = \alpha_r x^r + \alpha_{r-1}x^{r-1} + \ldots$, divisons par $F(x) = x^n + ax^{n-1} + \ldots$, et poussons l'opération jusqu'à obtenir un reste du degré $(n-1)$ au plus: $X_j = C_{n-1}x^{n-1} + C_{n-2}x^{n-2} + \ldots$ On observera que les coefficients de X_j ont la forme

$$C_{n-1} = \alpha_{n-m-1} + M\alpha_{n-m} + N\alpha_{n-m+1} + \ldots,$$

$$C_{n-2} = \alpha_{n-m-2} + M'\alpha_{n-m-1} + N'\alpha_{n-m} + \ldots$$

Alors si nous attribuons à α_{n-m-1} ses valeurs $0, 1, 2, \ldots (p-1)$, tandis que les autres α restent constantes, C_{n-1} prendra des valeurs qui, suivant le module p, seront congrues à $-\frac{p-1}{2}$, $-\frac{p-3}{2}, \ldots -1, 0, +1, \ldots +\frac{p-1}{2}$. Le nombre des valeurs positives se trouve donc égal à celui des valeurs négatives. Il y a une seule valeur de α_{n-m-1} pour lequel C_{n-1} devient zéro; alors il faut se reporter à C_{n-2}, et ainsi de suite; enfin on arrive aux restes X_j d'un degré $< m$, et on ne saurait rien dire de général à l'égard de leurs signes.

Nous allons maintenant déterminer le nombre h des restes X_j négatifs. Pour plus de clarté, soit $n - m = 3$. Les multi-

plicateurs X_i prennent les degrés $r = 3, 4, \dots (n-1)$. D'abord pour $r = 3$,

$$X_i = \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0.$$

α_3 peut avoir les $\frac{p-1}{2}$ valeurs $1, 2, \dots \frac{p-1}{2}$; α_2, α_1 et α_0 peuvent avoir chacun les p valeurs $0, 1, \dots (p-1)$. On aura un reste X_j négatif du degré $(n-1)$ pour $\frac{p-1}{2}$ valeurs de α_3, $\frac{p-1}{2}$ de α_2, p de α_1, p de α_0, soit $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 . p^2$. Puis on a un reste X_j négatif du degré $(n-2)$ pour $\frac{p-1}{2}$ valeurs de α_3, 1 de α_2, $\frac{p-1}{2}$ de α_1, p de α_0, soit $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 . p$. Puis on a un reste X_j négatif du degré $n - 3 = m$ pour $\frac{p-1}{2}$ valeurs de α_3, 1 de α_2, 1 de α_1, $\frac{p-1}{2}$ de α_0, soit $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 . 1$. En tout, pour $r = 3$ il y a $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 . (p^2 + p + 1)$ restes négatifs d'un degré $\geqq m$.

Ensuite pour $r = 4$.

$$X_i = \alpha_4 x^4 + \alpha_3 x^3 + \alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0.$$

On aura un reste X_j négatif du degré $(n-1)$ pour $\frac{p-1}{2}$ valeurs de α_4, p de α_3, $\frac{p-1}{2}$ de α_2, p de α_1, p de α_0, soit $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 . p^3$. Puis on a un reste X_j négatif du degré $(n-2)$ pour $\frac{p-1}{2}$ valeurs de α_4, p de α_3, 1 de α_2, $\frac{p-1}{2}$ de α_1, p de α_0, soit $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 . p^2$. Puis on a un reste X_j négatif du degré $n - 3 = m$ pour $\frac{p-1}{2}$ valeurs de α_4, p de α_3, 1 de α_2, 1 de α_1, $\frac{p-1}{2}$ de α_0, soit $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 . p$. En tout, pour $r = 4$

il y a $\left(\frac{p-1}{2}\right) \cdot (p^3 + p^2 + p)$ restes négatifs d'un degré $\geqq m$.

En continuant ainsi on trouve

$$h = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 (p^2 + p + 1)(1 + p + p^2 + \ldots + p^{n-4})$$

pour $n - m = 3$. Revenant au cas général:

$$h = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 (p^{n-m-1} + p^{n-m-2} + \ldots + p + 1)(1 + p + p^2 + \ldots + p^{m-1})$$

ou

$$h = \frac{p^{n-m} - 1}{2} \cdot \frac{p^m - 1}{2}.$$

Il en résulte que l'exposant de (-1) dans la formule de réciprocité s'écrit

$$\frac{p^m - 1}{2} + h = \frac{p^m - 1}{2} \cdot \frac{p^{n-m} + 1}{2}.$$

Pour plus de symétrie on peut le remplacer par

$$\frac{p^m - 1}{2} \cdot \frac{p^n - 1}{2},$$

qui est de même parité.

Le symbole $\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)$ n'a été défini que pour des polynômes dont la plus haute puissance de x a l'unité comme coefficient. Nous allons en donner une petite extension.

Si A est un nombre, nous posons

$$\left(\frac{A}{F(x)}\right) = +1 \text{ ou } = -1$$

selon que A est résidu quadratique ou nonrésidu de $F(x)$, suivant le module p.

Si $f(x)$ est un polynôme quelconque, mais n'ayant toujours pas de diviseur commun avec $F(x)$, nous le préparons au moyen du module p à être divisible par le coefficient de la plus haute puissance de x, tel que $f(x) = A\phi(x)$, et nous entendons par

$\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)$ le produit des valeurs de $\left(\frac{A}{F(x)}\right)$ et $\left(\frac{\phi(x)}{F(x)}\right)$, ce qui est conforme à la seconde propriété ci-dessus.

Nous pouvons maintenant dire de tout polynôme donné s'il est résidu ou non d'une fonction irréductible donnée suivant un module premier aussi donné. Par exemple, $5x+2$ est-il résidu ou non de x^3+2 suivant le module 7? Voici le calcul.

$$\left(\frac{5x+2}{x^3+2}\right)=\left(\frac{5x+30}{x^3+2}\right)=\left(\frac{5}{x^3+2}\right)\left(\frac{x+6}{x^3+2}\right);\quad \left(\frac{5}{x^3+2}\right)=\left(\frac{5}{7}\right)=$$

$$\left(\frac{7}{5}\right)=\left(\frac{2}{5}\right)=-1;\quad \left(\frac{x+6}{x^3+2}\right)=-\left(\frac{x^3+2}{x+6}\right)=-\left(\frac{3}{x+6}\right)=$$

$$-\left(\frac{3}{7}\right)=\left(\frac{7}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)=+1;\quad \left(\frac{5x+2}{x^3+2}\right)=-1.$$

donc $5x+2$ est non-résidu. Il est bien entendu qu'il faut savoir d'autre part que x^3+2 est irréductible.

M. Hilbert, dans son Mémoire mentionné au début, nomme parmi les applications qu'on pourrait faire de son théorème la recherche des critérium de résolubilité d'une équation indéterminée du second degré en nombres algébriques d'un champ donné. De même notre théorème peut servir pour la résolution de la même question à l'égard des congruences du second ordre. A titre d'exercice nous posons le problème suivant.

Pour quelles valeurs de p existent-il deux fonctions entières X et Y qui satisfassent à la congruence

$$(x+1)X^2+2xXY+(x-2)Y^2\equiv x^2-x+1 \pmod{7}.$$

Mettant la congruence proposée dans la forme

$$\{(x+1)X+xY\}^2\equiv(x+2)Y^2+(x+1)(x^2-x+1),$$

nous voyons que $(x+2)$ doit être résidu quadratique de (x^2-x+1). Il faudra distinguer les deux cas où (x^2-x+1) est irréductible et réductible suivant le module p. Bornons-nous au premier cas; la congruence $x^2-x+1\equiv 0$ ou $(2x-1)^2\equiv -3$ est alors impossible, c'est à dire que -3 est non-résidu de p, donc p est de la forme $3n-1$. Puis il faut que $\left(\frac{x+2}{x^2-x+1}\right)=1$.

On a

$$\left(\frac{x+2}{x^2-x+1}\right)=\left(\frac{x^2-x+1}{x+2}\right)=\left(\frac{7}{x+2}\right)=\left(\frac{7}{p}\right).$$

Si p est de la forme $4i+1$, $\left(\frac{7}{p}\right)=\left(\frac{p}{7}\right)$ est $=+1$ pour $p=7j+1$ ou $7j+2$ ou $7j+4$; pour être en même temps $=4i+1$ il faut avoir $p=28k+1$ ou $28k+9$ ou $28k+25$. Si p est de la forme $4i-1$, $\left(\frac{7}{p}\right)=-\left(\frac{p}{7}\right)$ est $=+1$ pour $p=7j+3$ ou $7j+5$ ou $7j+6$; pour être en même temps $=4i-1$ il faut avoir $p=28k-1$ ou $28k+3$ ou $28k-9$. Enfin si l'on introduit la condition $p=3n-1$ on arrive à ces six formes de p:

$$84m+29,\quad 84m+47,\quad 84m+53,\quad 84m+59,\quad 84m+65,$$
$$84m+83.$$

Cette condition est nécessaire, mais est-elle aussi suffisante? Voilà un problème bien difficile que nous ne songeons pas à entamer.

R 9 d

KRUKBEWEGING,

DOOR

F. J. VAES.
(Rotterdam.)

In „Dynamik der Kurbelgetriebe" van Dr. H. LORENZ (1901) wordt eerst de beweging onderzocht van het mechanisme drijfstang en kruk. De gewone vergelijkingen worden daarvoor opgesteld:

$$x + l = r \cos \phi + l \cos \beta \,..\,(1), \quad \text{en} \quad r \sin \phi = l \sin \beta \,..\,(2),$$

en onmiddellijk wordt dan $\cos \beta$ vervangen door de uit (2) berekende waarde. De wortelvorm, die dan ontstaat wordt in een reeks ontwikkeld, waarvan wegens de sterke convergentie slechts de eerste twee termen worden genomen. Dit is blijkbaar gedaan op het voetspoor van anderen.

Toch is het zeer te betreuren. Immers gaf schrijver reeds in 1891 een volledige theorie van de beweging zonder eenige benadering. [1]) Niet alleen zijn daardoor de gevolgtrekkingen wiskundig juist, doch bovendien overzichtelijker, omdat van elke formule een verklaring te geven is, die men mist bij de benaderde formules.

„Die Näherungsformeln tragen ersichtlich den Charakter abgebrochener periodischer Reihen", en dus vindt L. noodig om de reeks nog wat verder te ontwikkelen. In de coëfficiënten

[1]) Beschouwingen over de overbrenging van rechtlijnige in ronddraaiende beweging door drijfstang en kruk. Tijdschr. v. h. Kon. Inst. v. Ing. 1890—91, bl. 63 - 80 en 1891—92, bl. 52—58.

Studie over de theorie van RADINGER. Tijdschr. v. h. Kon. Inst. v. Ing. 1894 - 95, bl. 215 - 226.

De voorgaande vertaald:

Etude mathématique sur la transmission par bielle et manivelle. Étude sur la théorie de RADINGER. Annales de l'Éc. Polytechnique de Delft, tome VIII, 1897, bl. 114 - 192.

van cos ϕ, cos 2ϕ enz. worden dan weder hoogere machten van $\frac{r}{l}$ verwaarloosd.

De benaderde waarden komen nu ook voor in de traagheidskrachten; daardoor vervalt veel van de waarde der gevolgtrekkingen, en worden de formules noodeloos omslachtig.

Bij de „Energieaustausch" wordt opnieuw $\frac{r^2}{l^2}$ verwaarloosd, waardoor ook weder de formules geen verklaring toelaten.

Wanneer geen benaderingen waren ingevoerd, zouden de berekeningen op een aantal plaatsen korter kunnen zijn geweest, en ten allen tijde een uit den aard van het mechanisme te verklaren beteekenis hebben gehad.

Met die benaderingen heeft de heer L. noch een zijner voorgangers, de techniek een dienst bewezen; dit is zeer te betreuren, omdat het boek een poging is om de wiskunde nader te brengen tot de techniek; onwillekeurig zullen technici meenen, dat van wiskundige zijde niets beters is te leveren.

MÉDAILLE GUCCIA.

A l'occasion du IVᵉ CONGRÈS INTERNATIONAAL DES MATHÉMATICIENS, qui se tiendra à Rome en l'année 1908, le *Circolo Matematico di Palermo* décernera un prix international de Géométrie. Ce prix, qui sera appelé „MÉDAILLE GUCCIA" (du nom de son fondateur) consistera en une petite médaille portative en or et en une somme de 3000 francs.

On sait que, depuis les travaux auxquels a donné lieu le Prix STEINER décerné en 1882, la théorie des courbes gauches algébriques a été plutôt délaissée, et que même les grands progrès de la Géométrie moderne, obtenus par les méthodes synthétiques, ou algébriques, ou fonctionnelles, ont laissé de côté cette théorie; de sorte que les questions fondamentales, que l'on avait abordées dans les travaux cités, et d'autres questions encore qu'on pourrait se poser, n'ont pas fait l'objet de travaux ultérieurs. Si d'ailleurs on passe de l'espace ordinaire aux espaces supérieurs, on rencontre pour les courbes algébriques (en particulier pour leur classification, pour l'étude des courbes canoniques de genre donné, etc.) une foule de questions importantes dont personne encore ne s'est occupé. D'autre part, l'on connaît bien peu de propositions sur les courbes gauches algébriques obtenues en se limitant au champ réel, ou bien à un champ rationnel donné.

C'est en s'inspirant de ces considérations (mais sans vouloir d'ailleurs limiter d'avance, en aucune manière, les problèmes et les méthodes de recherche), que le *Circolo Matematico di Palermo*, conformément aux intentions du fondateur du prix, décernera la „MÉDAILLE GUCCIA" à

un mémoire qui fera faire un progrès essentiel à la théorie des courbes algébriques.

Dans le cas où, parmi les travaux envoyés au concours, aucun mémoire relatif à la théorie ci-dessus ne serait trouvé digne du prix, celui-ci pourra être adjugé à

un mémoire qui fera faire un progrès essentiel à la théorie des surfaces, ou autres variétés, algébriques.

Les mémoires destinés au concours devront être: inédits, rédigés en italien, ou français, allemand, anglais, et écrits (sauf les formules) avec la machine à écrire. Munis d'une épigraphe, ils devront parvenir, en trois exemplaires, au Président du *Circolo Matematico di Palermo* **avant le 1er juillet 1907**, accompagnés d'un pli cacheté contenant sur l'enveloppe l'épigraphe adoptée et à l'intéreur le nom et l'adresse de l'auteur. Le mémoire couronné sera inséré dans les „*Rendiconti*", ou autre publication, du *Circolo Matematico di Palermo*. L'auteur en recevra 200 tirages-à-part.

Dans le cas où aucun des mémoires présentés au concours ne serait trouvé digne du prix, celui-ci pourra être adjugé à un mémoire, sur les théories ci-dessus, qui aura été publié après la publication de ce programme et avant le 1er juillet 1907.

Le prix sera décerné par le *Circolo Matematico di Palermo* conformément à la décision d'une Commission internationale de trois membres, composée de

MM. Max Noether, professeur à l'Universitè de Erlangen,
Henri Poincaré, professeur à l'Université de Paris,
Corrado Segre, professeur à l'Université de Turin.

La lecture du rapport de la Commission, ainsi que la proclamation du nom du savant couronné et l'attribution du prix, auront lieu à Rome, en 1908, dans une des séances du IVe Congrès International des Mathématiciens.

Palerme, le 1er novembre 1904.

Le Président du *Circolo Matematico di Palermo*
M. L. ALBEGGIANI.

BIBLIOGRAPHIE.

Beginselen der Differentiaal- en Integraalrekening door N. C. GROTENDORST, hoogleeraar aan de K. M. A. Tweede verbeterde druk. Breda, de Koninklijke Militaire Academie, 1904, 8°, 513 blz.

Het doel, hetwelk de schrijver voor oogen heeft, blijkt duidelijk uit zijn werk. Wie begint met de studie der infinitesimaalrekening moet zich al dadelijk vertrouwd maken met tal voor hem nieuwe en ongewone begrippen. Voor hem werkt de lezing van een streng wetenschappelijk leerboek verwarrend en afschrikkend. Vooral wanneer hij zich voorstelt de wiskunde te beoefenen als hulpwetenschap en voornamelijk belang stelt in de toepassingen, behoeft hij een leerboek, dat op heldere en bevattelijke wijze de hoofdzaken behandelt, en waarin van allerlei moeielijke vraagpunten geen gewag wordt gemaakt.

Zulk een boek is ongetwijfeld het boek van den heer Grotendorst. Het vormt een aanschouwelijk geheel, waartoe de vele goed geteekende figuren in groote mate bijdragen. Behalve de achter het werk geplaatste vraagstukken ter oefening zijn er nog talrijke andere in den tekst geplaatst. Uit de keuze van die vraagstukken blijkt de ervaring van den schrijver als docent.

De behandelde stof komt ongeveer met die van de bekende elementaire fransche leerboeken overeen. In overeenstemming met het doel zijn van de bepaalde integralen alleen zoodanige behandeld, waarvan de waarde, hetzij door rechtstreeksche integratie, hetzij door middel van eenvoudige reeksontwikkelingen, kan worden afgeleid, en is de behandeling der differentiaalvergelijkingen zeer elementair en kort gehouden.

Misschien is hier en daar de schrijver in zijn streven om eenvoudig en bevattelijk te blijven iets te ver gegaan, waardoor de strengheid van het betoog niet ongerept is gebleven. Zoo wordt bijv. op blz. 341 en 342 *bewezen*, dat zoo de reeks

$\sum_1^\infty u_n$ convergeert in het vak $a < x < b$ en tot som heeft $f(x)$, men zal hebben

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_1^\infty \int_a^b u_n dx.$$

Voorzeker geldt dit voor de meest gebruikelijke reeksen, maar als men denkt aan de bestaande convergente reeksen, voor welke $f(x)$ en $\int_a^b f(x)\,dx$ eindige waarden hebben, terwijl de reeks $\sum_1^\infty \int_a^b u_n dx$ divergeert, dan is aan het door den schrijver gegeven *bewijs* geen groote kracht toe te kennen.

Intusschen den leerling zullen bewijzen als het hier bedoelde geen aanstoot geven; voor den aanvanger is het werk van den heer Grotendorst een zeer bruikbaar leerboek. Kl.

G. Lejeune-Dirichlet's Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen, herausgegeben von G. Arendt. Braunschweig, F. Vieweg und Sohn, 1904. In 8°, 471 blz., geb.

Reeds in 1871 verscheen eene door G. F. Meyers bewerkte uitgave van Dirichlet's „Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integralen zwischen reellen Grenzen", waaraan ten grondslag lagen de lessen door Dirichlet in 1858 aan de universiteit te Göttingen gegeven. Thans betreft het de lessen, die Dirichlet over hetzelfde onderwerp in 1854 gaf te Berlijn. De bewerker deelt mede, dat hij tot op zekere hoogte in gunstiger omstandigheden verkeerde, dan zijn voorganger, omdat hij beschikken kon over geheel volledige door hem destijds met de grootste zorgvuldigheid uitgewerkte aanteekeningen, waarin geen enkele gaping bestond.

Eenigszins in tegenstelling met Meyers heeft hij niet uit andere bronnen naar aanvulling van het door Dirichlet behandelde gezocht, maar juist er naar gestreefd, uitsluitend het door Dirichlet geleerde, ook wat den vorm betreft, zoo nauwkeurig en onvervalscht mogelijk weer te geven.

De eerste afdeeling geeft de grondslagen van de theorie der enkelvoudige bepaalde integralen tusschen eindige grenzen. In de tweede afdeeling, gesplitst in vier hoofdstukken, wordt het begrip der bepaalde integraal uitgebreid voor het geval, dat

de grenzen oneindig worden, en voor het geval, dat de te integreeren functie oneindig wordt.

Maar reeds in deze afdeeling wordt de theorie toegepast, en worden uitvoerig de integralen van Euler, bijzondere gevallen van de integraal

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{m-1}dx}{x^n - e^{\theta i}}$$

behandeld.

De derde afdeeling is gewijd aan de Γ-integralen van Euler. De functionaalvergelijking $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ wordt gebruikt om in aansluiting met de integraal de Γ-functie voor negatieve a te bepalen, en langs dezen weg wordt de theorie der Γ-functie ontwikkeld.

Omdat de beschouwing van dubbele integralen reeds hier goede diensten kan bewijzen, gaat aan de behandeling der Γ-integralen eene korte theorie der dubbele integralen vooraf.

De vierde afdeeling bevat beschouwingen over complexe grootheden, die als parameters in de integralen kunnen worden ingevoerd.

Met groote strengheid van betoog, zoodat steeds rekenschap gegeven wordt van de beteekenis der bewerkingen, wordt geleerd, hoe men van de invoering van complexe grootheden bij de berekening van bepaalde integralen partij kan trekken.

In de vijfde en laatste afdeeling worden eenige gewichtige en veel voorkomende integralen besproken, en wordt de strekking van verschillende berekeningsmethoden uiteengezet.

Het tweede deel, aanvangende met de zesde afdeeling, geeft de voortzetting van de theorie der dubbele integralen, de invoering van nieuwe veranderlijken, en de toepassingen op het berekenen van gebogen oppervlakken. Uitvoerig staat Dirichlet stil bij de oppervlakberekening der ellipsoïde en de verschillende methoden, welke daarbij zijn gevolgd.

De drievoudige integralen worden in de zevende afdeeling behandeld en wel in nauw verband met het beroemde vraagstuk van de aantrekking der ellipsoïden, tot welks oplossing Dirichlet zooveel heeft bijgebracht. In de achtste afdeeling wordt de methode van den discontinuen factor beschouwd, en behalve in het attractievraagstuk ook in andere voorbeelden toegepast.

Hiermede is het tweede deel besloten; er volgen dan in vijf verschillende hoofdstukken nog allerlei toepassingen, welke van de leer der bepaalde integralen te maken zijn.

In talrijke aanmerkingen heeft de bewerker rekenschap gegeven van elke kleine afwijking van den letterlijken tekst zijner aanteekeningen, waar deze onvermijdelijk was. Buitendien bevatten deze aanmerkingen hier en daar eene opgave der litteratuur.

Wij twijfelen er niet aan, of deze nieuwe bewerking van Dirichlet's Vorlesungen zal even als de vorige in Duitschland beschouwd worden als een der meest geschatte leerboeken over de theorie der bepaalde integralen, en kunnen alleen wenschen, dat het boek ook in ons land als zoodanig verbreiding zal vinden.

Kl.

Lessen over de lagere algebra door J. J. van Laar, privaat-docent aan de Amsterdamsche Universiteit. Amsterdam, S. L. van Looy, 1904. Twee deelen, 8°, 232 en 223 blz.

De schrijver bestemt dit leerboek voornamelijk voor hen, die zich, ook door zelfonderricht, voor een examen moeten bekwamen, waarbij eenige kennis van de algebra wordt gevorderd. Blijkens het voorbericht in het eerste deel oordeelt de schrijver ongunstig over de wijze, waarop tot voor eenige jaren veelal de algebra werd onderwezen. Te veel is in de algebraboeken „fossiel"; men treft te veel „onbruikbare rudimenten" aan. Vooral op de „schoolmeesterij" is de schrijver fel gebeten en zoo heeft hij dan getracht om een leerboek samen te stellen, waarin de bedoelde gebreken worden vermeden, waarin veel is vereenvoudigd en waarin alleen is behandeld het belangrijke, het essentiëele, alleen wat noodig is voor de voortgezette studie der algebra en voor de toepassing op andere wetenschappen.

Het is mij niet mogelijk om eene nauwkeurige en tot in de bijzonderheden afdalende vergelijking te maken tusschen het werk van den heer Van Laar en andere bestaande leerboeken. Maar bij het doorbladeren bespeurt men wel, dat inderdaad van schoolmeesterij geen spoor is te vinden. Ook treft de schrijftrant, die zooals de schrijver mededeelt, overal waar nadere uiteenzettingen wenschelijk waren, zoo is gekozen, dat de leerling al lezende zou kunnen meenen, mondeling onderricht te ontvangen. Voor hen, die zelf in de algebra hun weg moeten zoeken, levert dit zeker voordeel; in elk geval geeft deze stijl iets levendigs aan de beschouwingen.

Het eerste deel omvat de leerstof van de beide laagste klassen eener H. B. S., het tweede is bestemd voor de drie hoogste. Dit tweede deel behandelt veel meer dan in de gebruikelijke

leerboeken in ons land gewoonlijk gevonden wordt. Behalve dat er in een afzonderlijk hoofdstuk de goniometrie is ingelascht, vindt men er beschouwingen over convergentie en divergentie van reeksen, over het getal *e* en de neperiaansche logarithmen, over de formule van de Moivre, over interpolatie van getallenrijen, over kansrekening en nog veel meer. Talrijke vraagstukken zijn door het geheele werk verspreid.

Voorzeker is het hier beschouwde werk een bruikbaar leerboek, dat in den smaak vooral van den leerling zal vallen. Voor hem is het een afwisseling, wanneer de schrijver zooals op blz. 167 (I) bijv. naar aanleiding der negatieve en gebroken exponenten de „ontoerekenbare examinomanen" te lijf gaat. Dit is onderhoudender dan lange beschouwingen over het begrip „onmeetbaar getal" en de leerling is tevreden als hij verneemt, dat een onmeetbaar getal noch geheel, noch gebroken is.

Intusschen, dat de schrijver in een boek voor minder gevorderde leerlingen de uiterste strengheid in de redeneering niet betracht, zal niemand hem verwijten; misschien is het tot op zekere hoogte aanbevelenswaardig. Met die opvatting zal ieder instemmen, die zooals de schrijver de wiskunde hoofdzakelijk als hulpwetenschap beschouwt. Maar men kan daarin te ver gaan, en dan is de wiskunde geen wiskunde meer.

Zoo is bijv. de wijze, waarop de heer Van Laar in deel I, blz. 173 en in deel II, blz. 68 het getal *e* behandelt, van een zuiver wiskundig standpunt moeielijk te verdedigen. Al te zeer heeft de schrijver in zijn leerboek over wiskunde het oog gericht gehad op andere wetenschappen.

Als de schrijver in zijn voorbericht zegt, dat tegenwoordig vele onzer leerboeken eene vergelijking met de beste buitenlandsche kunnen doorstaan, zou ik zijne aandacht willen vestigen op Laurent's Traité d'Algèbre, dat van denzelfden omvang als zijn werk, ongeveer dezelfde stof behandelt. Dit boek is naast zoovele andere het bewijs, dat een leerboek duidelijk en bevattelijk kan zijn, zonder dat de schrijver, al is het met de loffelijkste bedoelingen, de wiskunde onrecht doet. Kl.

G e t a l l e n l e e r door W. Mantel. Haarlem, de Erven F. Bohn, 1904, klein 8°, 104 blz.

In een klein bestek behandelt de heer Mantel hier de stof, waarvan de kennis op de acte-examens wordt gevraagd. Tevens

bestemt hij zijn werkje voor docenten, voor hen, die het willen worden en voor liefhebbers. Groote kennis wordt bij de lezing niet ondersteld. Om den schrijver te kunnen volgen, is alleen bekendheid met de rekenkunde en met de algebra noodig.

Na in het eerste hoofdstuk de grondslagen der getallenleer te hebben behandeld, wordt vervolgens de deelbaarheid besproken. Hieraan sluiten hoofdstukken over de functie φ (G), de kettingbreuken en de vergelijking van Pell, de rekenkundige reeksen met de onbepaalde vergelijkingen van den eersten graad, de meetkundige reeksen met de stelling van Fermat, en eindelijk de rekenkundige reeksen van hoogere orde met de congruenties, de stelling van Wilson en de theorie der kwadraatresten.

Aan het einde van elk hoofdstuk worden vragen ter oefening gesteld.

Het dikwijls schijnbaar afgetrokken onderwerp wordt door den heer Mantel op de hem eigen oorspronkelijke wijze behandeld. Onverwachte maar juiste, soms eenigszins humoristisch getinte opmerkingen strekken zoowel om het betoog en de zienswijze van den schrijver te verduidelijken, als tot veraangenaming van de lezing. Aan velen zal, naar wij vertrouwen, de studie van dit boekje goede diensten bewijzen. Kl.

Oeuvres scientifiques de L. Lorenz, revues et annotées par H. Valentiner. Publiées aux frais de la fondation Carlsberg. Tome second, 2ième fascicule. Copenhague, Librairie Lehmann & Stage, 1904, 8°, blz. 319—583.

Bovenstaande aflevering van de gezamenlijke werken van wijlen den Deenschen geleerde bevat twaalf zijner verhandelingen, die voor verreweg het grootste gedeelte op de zuivere wiskunde betrekking hebben, benevens eene beschouwing van zijn leven en zijne werken door den uitgever H. Valentiner. Lorenz, wiens studiën zich over een uitgestrekt gebied bewogen — behalve de natuurkunde en de wiskunde beoefende hij ook een tijd lang de scheikunde, de wijsbegeerte en de theologie —, is, zooals Valentiner opmerkt, zelfs wanneer hij wiskundige onderwerpen behandelt, in den grond een physicus. In de eerste plaats trekken die vraagstukken uit de wiskunde hem aan, die op de natuurkunde onmiddellijk betrekking hebben, maar in de tweede plaats bekommert hij zich ook in vragen der zuivere wiskunde meer om de uitkomsten, dan om de juistheid der bewijsvoering. Volgens Valentiner zijn zijne zuiver speculatieve redeneeringen

weinig helder en zeer moeielijk te volgen, en niet altijd is het betoog volkomen afdoende.

Eene der belangrijkste verhandelingen, die in de beschouwde aflevering voorkomen, is ten eerste die over de ontwikkeling eener willekeurige functie door middel van gegeven functies. Inzonderheid komt hier de ontwikkeling met behulp van Bessel'sche functies op den voorgrond. Eene tweede verhandeling over vereffening van waarnemingsfouten heeft ten doel om de meest gunstige vereffening op te sporen, maar de uitkomsten zijn niet geheel bevredigend.

Drie verhandelingen zijn er voorts, die op getallentheorie betrekking hebben. In de eerste is het uitgangspunt de oplossing der vergelijking $m^2 + cn^2 = N$, waarin m en n geheelen en c en N positieve geheelen zijn. De beschouwing dezer vergelijking leidt tot het vraagstuk, om de reeks $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} q^{m^2+cn^2}$ in anderen vorm te brengen, en uit de studie dezer reeks worden nu allerlei merkwaardige stellingen afgeleid, die het aantal oplossingen der vergelijking $m^2 + cn^2 = N$ in verschillende bijzondere gevallen aangeven.

De twee laatste verhandelingen hebben tot onderwerp de verspreiding der priemgetallen. Getracht wordt te bewijzen, dat de afwijkingen tusschen het werkelijk aantal priemgetallen in een vak en het aantal, dat de formule van Riemann oplevert, perioden vertoonen. Hoe belangwekkend de uitkomsten van dit onderzoek ook zijn, onomstootelijk vastgesteld zijn zij niet.

Eene nauwgezette studie van Lorenz' wiskundige werken zal ongetwijfeld de inspanning beloonen, en de beoefenaars der wiskunde zullen daarom waardeeren de zorgen door den heer Valentiner en door de stichting Carlsberg aan deze uitgave gewijd.
Kl.

Introduction à la géométrie générale par Georges Lechalas, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées. Paris, Gauthier Villars, 1904, klein 8°, 55 blz.

De schrijver van dit kleine werkje vestigt er de aandacht op, dat gewoonlijk niet genoegzaam verband wordt gebracht tusschen de meetkunde van Euclides en die van Lobatchefsky en van Riemann. Laatstgenoemde theoriëen worden ontwikkeld naar aanleiding van verschillende onderstellingen aangaande de evenwijdige lijnen, en mogen nu al de punten van overeen-

komst en van verschil met de meetkunde van Euclides worden opgemerkt, teveel toch worden naar het oordeel van den schrijver de drie meetkundige beschouwingswijzen elk voor zich als een afzonderlijk en afgesloten geheel beschouwd.

Hij is van gevoelen, dat er meer eenheid in de opvattingen moet worden gebracht, en dat dit kan geschieden, door de meetkunde in de ruimte van vier afmetingen te hulp te roepen. Op grond van de bekende voorbeelden doet hij uitkomen, dat de studie van figuren van een bepaald aantal afmetingen onvolledig moet blijven, zoolang men zich niet die figuren geplaatst denkt in eene ruimte, die meer afmetingen telt.

In de Euclidische ruimte van vier afmetingen ligt eene spherische ruimte van drie, en de in deze laatste gelegen spherische ruimte van twee afmetingen, die dezelfde kromming heeft, is volkomen identiek met het vlak van de meetkunde van Riemann. Die identiteit vervangt de analogie, die men heeft opgemerkt tusschen de tweedimensionale ruimte van Riemann en het bolloppervlak gelegen in de driedimensionale ruimte van Euclides.

Moeielijker is de studie der meetkunde van Lobatchefsky. In geen enkele Euclidische ruimte zijn ruimten van constante negatieve kromming aanwezig. Een uitgangspunt moet worden gekozen. Als zoodanig dient de onderstelling, dat de som der hoeken van een vlakken driehoek kleiner dan twee rechte hoeken zal zijn. Maar is men eenmaal langs dezen weg gekomen tot het begrip van het Lobatchefsky'sche vlak, en heeft men in dat vlak de horicyclen en hypercyclen leeren kennen, dan kan men opklimmen tot de ruimten van drie en meer afmetingen, en de „horisphère" bijv. zal, ook wat de omkeerbaarheid betreft, alle eigenschappen bezitten van het Euclidische vlak, zoo men, uitgaande van de Lobatchefsky'sche ruimte van vier afmetingen, de „horisphère" zich geplaatst denkt in eene ruimte van drie afmetingen, welke de horicycle tot geodetische lijn heeft. Kl.

Lobatto's lessen over de hoogere algebra. Zesde druk, opnieuw bewerkt door A. E. Rahusen, oud-hoogleeraar aan de Polytechnische School. In 8°, 500 blz., Sneek, J. F. van Druten, 1904.

De omstandigheid, dat thans reeds wederom een nieuwe druk van Lobatto noodig was, bewijst de deugdelijkheid van het leerboek. Volgens het voorbericht is deze zesde druk op enkele

veranderingen na, hoofdzakelijk de redactie betreffende, een herdruk van den vijfden. Wij kunnen dus verwijzen naar de aankondiging in deel IV, tweede reeks, (blz. 253) van dit tijdschrift. Kl.

Die Lehre von der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raume von Dr. H. de Vries, Dozent a. d. Polytechnischen Schule zu Delft. Leipzig, G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, 1905.

De meerdimensionale meetkunde wint voortdurend veld; dit blijkt uit het groot aantal beschouwingen, waartoe zij aanleiding geeft; dit blijkt vooral uit het feit, dat, terwijl nog voor weinige jaren zij slechts diepzinnige beschouwingen, in wiskundige en wijsgeerige tijdschriften opgenomen, in het leven riep; terwijl in dit zelfde tijdperk nog aanhoudend de strijdvraag werd opgeworpen, of zij wel recht van bestaan had, wij nu reeds zoover zijn, dat er leerboeken over dit onderwerp bestaan, en er zelfs binnen de grens der leerboeken verschillende richtingen ontstaan. Jouffret, onlangs overleden, acht het nog noodig het recht van bestaan der meerdimensionale meetkunde te bepleiten, en houdt bovenal de analytische meetkunde in het oog, waarvan hij het formulenstelsel overneemt; P. H. Schoute overziet het geheele terrein, en formeert een paedagogisch en wetenschappelijk geheel, als onderdeel waarvan verschijnt de beschrijvende meetkunde. Bij dit onderdeel doet zich de eigenaardigheid voor, dat er, in schijntegenstrijdigheid met het onderwerp, geconstrueerd wordt; maar de gegeven constructiën steunen nog op de rechthoekige projectiën, de andere projectiemethoden worden aangeduid. H. de Vries, wiens werk we nu onder de aandacht van de lezers van het „Nieuw Archief" brengen, beschouwt deze aanduiding als een noodiging tot verdere uitwerking en werkt de centrale projectie uit, en wel door middel van constructiën. Het kenmerkende van zijn boek is, dat voor hem twistgedingen en zelfs afgetrokken beschouwingen thans niet aan de orde zijn; bij den lezer onderstelt hij eenige kennis van de meerdimensionale meetkunde; zijn doel is de vruchtbare methoden der centrale projectie op haar toe te passen en dit door uitgewerkte werkstukken aan den lezer te toonen. Daarom ook beperkt hij zich tot de ruimte met vier afmetingen.

Hiermede is het doel van den schrijver omschreven. De wijze, waarop we zijn werk zullen bespreken, volgt uit deze omschrijving. Voorop worde gesteld de kern der methode, waarbij

we weglaten die omschrijvingen, welke onmisbaar zijn voor hen, die het boek verder bestudeeren willen, maar die dit verslag te breed zouden doen worden; daarna volgt een zeer kort overzicht van den inhoud van het geheele werk.

De schrijver denkt zich een ruimte R_4, waarin als projectieruimte een R^p_3 wordt aangenomen. In deze wordt weder een projectievlak R^p_2 aangenomen. Om een punt C_2 van R^p_2 als middelpunt wordt met een straal d (distantie) een cirkel in R^p_2 geconstrueerd; in C_2 richt men op R^p_2 de in R^p_3 liggende loodlijn C_2C_1 op, waarbij $C_2C_1 = d$ is; C_1 is nu het projectiecentrum voor R^p_3.

Tot dusverre stemt de voorstelling met de gebruikelijke overeen, nu moet evenwel de overgang tot R_4 gevonden worden. Daartoe beschrijft men om C_1 met een straal d een in R^p_3 liggenden bol en dan wordt in C_1 de eenige in R_4 liggende loodlijn op R^p_3 gericht; daarop wordt nogmaals de lengte $C_1C_0 = d$ uitgemeten. Dit laatste punt C_0 is het projectiecentrum voor R_4.

Men ziet allicht waarheen de schrijver ons geleidt: de projecteering begint bij C_0 (nul-projectie), gaat over op C_1 (eenprojectie) en bereikt dus ten slotte het vlak R^p_2; toch zullen we nog een schrede met hem medegaan, voor we de bespreking der methode verlaten, en zeer in 't kort de centrale projectie eener rechte lijn volgens dit schema behandelen. Zooals men weet is bij de centrale projectie de rechte lijn de hoeksteen der methode.

Zij dan een rechte lijn g in R_4 gegeven; zij snijdt R^p_3 in het doorgangspunt S; een evenwijdige door C_0 snijdt R^p_3 in het vluchtpunt Q_0. SQ_0 is nu de projectie van g op R^p_3, korter nulprojectie g_0. Nu wordt uit C_1 als centrum en op R^p_2 als tafereel g_0 geprojecteerd; g_0 snijdt R^p_2 in een punt S_1, de constructie van het vluchtpunt R_{01} geeft aanleiding tot de volgende opmerking. Door C_0 is één R'_3 evenwijdig aan R^p_3 te leggen (verdwijningsruimte), de nulprojectiën harer punten liggen in het vlak in het oneindige van R^p_3. De lijn g snijdt R'_3 in het verdwijnpunt R van g en de nulprojectie van dit punt, R_0, is het punt in het oneindige van g_0; het vluchtpunt van R_0 op R^p_2 wordt dus in het stelsel van den schrijver R_{01}; $S_1R_{01} = g_{01}$ is nu de een-projectie van g_0 en de nul-een-projectie van g; zij bevat ook de punten S_{01} en Q_{01}, een-projectiën van doorgangs- en vluchtpunt van g.

We zullen nu aan hem, die het werk bestudeeren wil, over-

laten den schrijver verder te volgen in zijn ontwikkelingen en constructiën en een overzicht van de daarin verwerkte stof geven.

In het eerste deel wordt het grondwerk der methode gegeven, de bepaling der ruimten R_0, R_1, R_2, R_3 en de eenvoudigste gevallen van lengte- en hoekmeting. Bij de behandeling van die onderwerpen stonden den schrijver de methoden van W. Fiedler voor oogen: het aantal gevallen wordt nu evenwel grooter, daar het aantal beschikbare elementen één meer is. Daardoor komen ook allerlei vraagstukken aan de orde, die in de centrale projectie in R_3 niet voorkomen, bijv.: Hoek eener rechte lijn met $R^p{}_3$, rechte lijn $//R^p{}_3$, hoek van een vlak met $R^p{}_3$, van een R_3 met $R^p{}_3$. De constructiën worden uitgevoerd of de uitvoering daarvan wordt aangegeven.

Het tweede deel behandelt de grondconstructiën. Zij zijn een gevolg van de verbinding der elementen met elkander. Hij, die zich met zijn gedachten in de beschrijvende meetkunde der loodrechte projectievlakken zoowel als in de centrale projectiemethode verplaatst, weet dat de eerste constructiën deze verbindingen tot onderwerp hebben, b.v. het leggen van een vlak door twee elkaar snijdende rechten, het bepalen van de doorsnede van twee vlakken, enz. Hier heeft men met één element meer te doen: de ruimte, en daaruit vloeit een grooter aantal verbindingen voort; het snijvlak van twee ruimten staat vooraan.

Eindelijk behandelt het derde deel: loodrechte standen, omslaan van projecteerende en niet projecteerende ruimten in $R^p{}_3$, afstand van twee lineaire ruimten. Hier gelden dezelfde opmerkingen als bij het vorige deel, het aantal verbindingen is grooter dan bij de beschrijvende meetkunde in R_3; zoo zal men aantreffen: hoek van een rechte met een ruimte, van een vlak met een ruimte, van twee ruimten; het neêrslaan vormt het laatste gedeelte van het werk.

We hopen door het hier medegedeelde het verdienstelijke van dit werk in het licht gesteld te hebben en willen besluiten met eenige opmerkingen over de richting, waarin het zich beweegt. De meetkunde in het platte vlak heeft ongetwijfeld veel te danken aan het beginsel van projectie uit de ruimte. We wijzen daartoe slechts op de wijze, waarop W. Fiedler de eigenschappen der binodale en trinodale vlakke bikwadratische krommen afleidt uit de bikwadratische ruimtekrommen; zoo ook toonde reeds voor vele jaren C. Segre, dat men door projectie uit R_4 een theorie der vierdegraadsoppervlakken met

dubbelkegelsnede kan opbouwen. Ongetwijfeld kan in deze richting nog veel gedaan worden, maar daarvoor is het noodig, dat het voorstellingsvermogen door constructiën, zichtbaar voor het oog, gesteund worde. En daar de centrale projectie, door haar algemeenheid, zich tot het opsporen van meetkundige betrekkingen voortreffelijk leent, zoe meenen we, dat dit werk een krachtige opwekking tot onderzoekingen in voormelde richting mag worden genoemd. J. C.

Leerboek der Beschrijvende Meetkunde door Prof. Dr. A. J. van Pesch. Derde druk, bewerkt door P. Wijdenes. Deventer, Ch. Dixon, 1904. (ƒ 1.50).

Oefenbladen. Methodisch gerangschikte verzameling van 350 vraagstukken uit de beschrijvende meetkunde, door P. Wijdenes. Deventer, Ch. Dixon, 1904 (ƒ 1.20).

Deze derde druk van het leerboek der beschrijvende meetkunde van A. J. van Pesch is in vele opzichten een nieuw werk. De bewerker, de heer Wijdenes, heeft de wijze van behandeling in vele gevallen belangrijk omgewerkt, het aantal der behandelde onderwerpen uitgebreid en aan de in de vroegere drukken voorkomende vraagstukken een groot aantal nieuwe toegevoegd.

Na eene korte inleiding wordt in het eerste hoofdstuk overgegaan tot de bepaling van punten, lijnen en vlakken door middel van hunne projecties op of hunne doorgangen met de projectievlakken. In de volgende hoofdstukken worden dan de gewone constructies betreffende de snijding van lijnen en vlakken, enz. behandeld. Vrij uitvoerig is het hoofdstuk over de veelvlakken, waarbij niet alleen de bepaling der doorsnede van een veelvlak met een plat vlak, doch ook die van twee veelvlakken ter sprake komt. Een hoofdstuk over enkele eenvoudige constructies betreffende den bol besluit het boek.

Bij het doorlezen maakte ik enkele opmerkingen, die niet zoozeer dit werk alleen, doch vele leerboeken der beschrijvende meetkunde betreffen. Allereerst, waarom wordt toch steeds, reeds in 't begin een derde projectievlak ingevoerd, waar twee projectievlakken ter bepaling van punten, lijnen en vlakken der ruimte en voor het uitvoeren der constructies in alle gevallen voldoende zijn? De eenige uitwerking, die de invoering van dit derde projectievlak heeft is, dat de studie van dit voor vele leerlingen toch reeds moeielijke vak noodeloos veel moeielijker wordt gemaakt. Men breke toch met die gewoonte en verschuive de invoering van dit derde vlak, evenals het zoo-

genaamde veranderen van projectievlakken tot nà de behandeling der geheele elementaire beschrijvende meetkunde, wanneer de leerlingen vertrouwd zijn geworden met het uitvoeren van constructies met behulp van de twee onmisbare projectievlakken. Dan is er gelegenheid om te doen zien, hoe uit de twee projecties eener ruimtefiguur eene derde op een nieuw projectievlak kan worden afgeleid en kan er met eenige voorbeelden op worden gewezen, hoe de invoering van zulk een nieuw projectievlak kan dienen om van enkele vraagstukken een andere oplossing dan de vroeger behandelde te geven.

Eene tweede opmerking is deze, dat het, voor het schrijven van een goed leerboek der beschrijvende meetkunde, wenschelijk is, dat de schrijver vertrouwd zij minstens met de beginselen der projectieve meetkunde, al was het alleen om gebruik te kunnen maken van de vele vereenvoudigingen van allerlei constructies, die daardoor aan de hand worden gedaan.

En eindelijk, de figuren in zulk een leerboek moeten met de uiterste zorg zijn geteekend, opdat men zulk eene teekening lezen kan, d. w. z. kan zien, zonder veel moeite, welke constructie is uitgevoerd. Het uitvoeren van dergelijke constructies door den leerling beteekent weinig, wanneer daarbij niet op groote netheid en dus op de grootst mogelijke te verkrijgen juistheid gelet wordt. De leeraar en de schrijver van een leerboek moeten in dat opzicht een voorbeeld geven.

Aan den laatsten eisch voldoet het hier besproken leerboek slechts in geringe mate. De uitvoering der figuren laat veel te wenschen over; figuren als die op bladz. 68 en 82 zijn onleesbaar. Z.

J. A. de Séguier. **Théorie des groupes finis. Éléments de la théorie des groupes abstraits.** Paris, Gauthier-Villars, 1904, 8°, 176 blz.

Bij de studie der groepentheorie blijkt, dat groepen van bewerkingen van verschillenden aard de meest volkomen overeenkomst kunnen vertoonen. Zoo kan eene eindige groep van bewegingen volkomen analoog zijn aan eene groep van letterverwisselingen: stelt men elke bewerking zoowel in de eene als in de andere groep door eene letter voor, dan zal elke gelijkheid van een der letters aan een gedurig product van letters te kennen geven, dat eene bewerking der groep aequivalent is met eene opeenvolging van andere bewerkingen der groep. Stemmen nu de bewegingsgroep en de substitutiegroep geheel overeen in deze gelijkheden, die het

verband tusschen de verschillende bewerkingen der groep weergeven, dan kan men zeggen dat bewegingsgroep en substitutiegroep één en dezelfde groep zijn: ze verschillen alleen in de voorwerpen, waarmee geopereerd wordt, niet in de operaties. Het ligt dus voor de hand te abstraheeren van den aard dezer voorwerpen en groepen te definiëeren òf door de bedoelde gelijkheden, òf door de tafel van vermenigvuldiging voor de verschillende bewerkingen.

De schrijver van dit boek beschouwt in dezen zin abstracte eindige groepen. In het eerste hoofdstuk behandelt hij als inleiding de Cantor'sche theorie der verzamelingen, bespreekt hij definities en vergelijkingen van groepen; negatieve en rationale getallen, imaginairen van Galois en algebraïsche getallen treden ls elementen van groepen op. De eenvoudigste eigenschappen van algebraïsche getallenlichamen worden besproken, uitvoeriger worden de eindige lichamen van Galois behandeld. In het tweede hoofdstuk worden de ondergroepen bestudeerd: de samenstelling van groepen, de stellingen van Sylow en van Jordan komen hier aan de orde. In het derde hoofdstuk: oneindige en eindige Abelsche groepen, Hamiltonsche groepen. In het vierde worden de groepen van de orde p^m (p = priemgetal), meer in 't bijzonder de groepen van de orden p^3, p^4, p^5, nagegaan. In noten worden behandeld: 1°. de eindige bewegingsgroepen, 2°. de matrices (en determinanten) en de lineaire stelsels; in eene 3de noot wordt eenige uitbreiding gegeven aan eigenschappen van groepen der orde p^m. D. C.

Annuaire pour l'an 1905, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars. 669 blz.

Zooals in het vorige jaarboek werd aangekondigd, bevat het jaarboek voor 1905 in plaats van de opgaven, die betrekking hebben op natuurkunde en scheikunde, thans gegevens betreffende aardrijkskunde, statistiek, muntwezen, maten en gewichten en metereologie. Ook in het sterrekundige gedeelte zijn enkele veranderingen gebracht. Aan het slot is geplaatst het tweede gedeelte der verhandeling: Explication élémentaire des marées par M. P. Hatt.

Bij het doorbladeren wordt men getroffen door de veelzijdigheid en de volledigheid der opgaven van deze hoogst nuttige en welbekende uitgave. Kl.

INHOUD.

Blz.

V. T. **HAYASHI**. A brief history of the Japanese mathematics (*vervolg*) . . . . 325.
M²1e. J. **DE VRIES**. Ueber Flächenbüschel nter Ordnung . . 362.
O5a. A. W. **GROENMAN**. Een inhoudsformule voor een groep van lichamen met twee evenwijdige grensvlakken. . . . 365.
E5. J. G. **RUTGERS**. Over de bepaalde integraal $\int_0^1 e^{-q^z} z^{p-1} dz$. 368.
I3c. W. **MANTEL**. Résidus quadratiques de polynômes . . . 374.
R9d. F. J. **VAES**. Krukbeweging . . . . 387.
M³. Médaille Guccia . . . . 389.

Bibliographie.

N. C. GROTENDORST. Beginselen der Differentiaal- en Integraalrekening. Tweede verbeterde druk. Breda, de Kon. Mil. Academie, 1904.

G. LEJEUNE—DIRICHLET's Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen, herausgegeben von G. Arendt. Braunschweig, F. Vieweg und Sohn, 1904.

J. J. VAN LAAR. Lessen over de lagere algebra. Twee deelen. Amsterdam, S. L. van Looy.

W. MANTEL. Getallenleer. Haarlem, de Erven F. Bohn, 1904.

Oeuvres scientifiques de L. LORENTZ, revues et annotées par H. VALENTINER. Publiées aux frais de la fondation Carlsberg. Tome II, 2ième fascicule. Copenhague, Librairie Lehmann et Stage, 1904.

G. LECHALAS. Introduction à la géométrie générale. Paris, Gauthier-Villars, 1904.

LOBATTO's lessen over de hoogere algebra. Zesde druk, opnieuw bewerkt door A. E. RAHUSEN. Sneek, J. F. van Druten, 1904.

H. DE VRIES. Die Lehre von der Zentralprojection im vierdimensionalen Raume. Leipzig, G. J. Göschen'sche Verlagshandlung, 1904.

Leerboek der beschrijvende meetkunde door Prof. dr. A. J. VAN PESCH. Derde druk, bewerkt door P. WIJDENES. Oefenbladen. Methodisch gerangschikte verzameling van 350 vraagstukken uit de beschrijvende meetkunde door P. WIJDENES. Deventer, Ch. Dixon, 1904.

J. A. DE SÉGUIER. Théorie des groupes finis. Éléments de la théorie des groupes abstraits. Paris, Gauthier-Villars, 1904.

Annuaire pour l'an 1905, publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques. Paris, Gauthier-Villars.

De redactie van het „Nieuw Archief" brengt den medewerkers in herinnering, dat met het oog op den betrekkelijk geringen omvang van het tijdschrift bijdragen van niet te groote uitgebreidheid de meest gewenschte zijn.

Alle stukken het „Nieuw Archief" betreffende gelieve men te richten aan den Secretaris der Redactie, Dr. **J. C. KLUYVER** te Leiden.

Boek-, Muziek- en Handelsdrukkerij van GEBR. HOITSEMA te Groningen.